Убегающие — Зацикливание — 14 октября 2016

1. **a)** На доске отмечено несколько точек. Из каждой точки проведена ровно одна стрелка в какую-то из других точек. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, рано или поздно начнешь ходить по циклу.

b) Докажите, что если, кроме того, в каждую из точек ведет ровно одна стрелка, то, начав из любой точки, рано или поздно попадешь в нее снова.

2. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что его можно вернуть в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

3. В последовательности 201696... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предшествующих цифр. Докажите, что в этой последовательности снова встретится четверка 2016.

4. В стране 10 городов, некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением, в каждый город ровно одна дорога входит и из каждого города ровно одна дорога выходит. В каждом городе находится по автомобилисту. Каждый день каждый автомобилист проезжает одну дорогу. Найдите такое минимальное $N > 1$, что ровно через N дней все автомобилисты будут в тех городах, из которых начинали движение, вне зависимости от того, как именно проложены дороги.

5. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, причем длина периода не больше **a)** 10000; **b)** 625. **c*)** Чему она равна?

6. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится без предпериода.

7. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.

Убегающие — Зацикливание — 14 октября 2016

1. **a)** На доске отмечено несколько точек. Из каждой точки проведена ровно одна стрелка в какую-то из других точек. Докажите, что, двигаясь по стрелкам, рано или поздно начнешь ходить по циклу.

b) Докажите, что если, кроме того, в каждую из точек ведет ровно одна стрелка, то, начав из любой точки, рано или поздно попадешь в нее снова.

2. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что его можно вернуть в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

3. В последовательности 201696... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предшествующих цифр. Докажите, что в этой последовательности снова встретится четверка 2016.

4. В стране 10 городов, некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением, в каждый город ровно одна дорога входит и из каждого города ровно одна дорога выходит. В каждом городе находится по автомобилисту. Каждый день каждый автомобилист проезжает одну дорогу. Найдите такое минимальное $N > 1$, что ровно через N дней все автомобилисты будут в тех городах, из которых начинали движение, вне зависимости от того, как именно проложены дороги.

5. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, причем длина периода не больше **a)** 10000; **b)** 625. **c*)** Чему она равна?

6. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится без предпериода.

7. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.

а) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.

б) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.