Убегающие **Неравенство о средних** 12 октября 2016

1. Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом (неравенство Коши). Для произвольных положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

а) Докажите это методом Штурма, постепенно сближая числа x_1, x_2, …, x_n к их среднему арифметическому.

б) Докажите это по индукции: проверьте базу, научитесь переходить от n к $2n$ и научитесь спускаться от m к $m-1$.

2. Неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом. Докажите, что для произвольных положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

3. Неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом. Докажите, что для произвольных положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

4. Для положительных a и b докажите, что $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

5. Докажите, что $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} < 12$.

6. Для положительных a, b, c докажите, что $abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$.

7. Для натуральных чисел a и b докажите неравенство $2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}} \leqslant a^2+b^2$.

8. При каком $x \in [0,1]$ функция $f(x) = x(1-x)^{99}$ принимает наибольшее значение? (Производной пользоваться нельзя.)

9. Найдите минимум выражения $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_5}{x_6}$, если $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6 \leqslant 1000$.

10. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant abcd$.

Убегающие **Неравенство о средних** 12 октября 2016

1. Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом (неравенство Коши). Для произвольных положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

а) Докажите это методом Штурма, постепенно сближая числа x_1, x_2, …, x_n к их среднему арифметическому.

б) Докажите это по индукции: проверьте базу, научитесь переходить от n к $2n$ и научитесь спускаться от m к $m-1$.

2. Неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратическом. Докажите, что для произвольных положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

3. Неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом. Докажите, что для произвольных положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

4. Для положительных a и b докажите, что $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

5. Докажите, что $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} < 12$.

6. Для положительных a, b, c докажите, что $abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$.

7. Для натуральных чисел a и b докажите неравенство $2\sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}} \leqslant a^2+b^2$.

8. При каком $x \in [0,1]$ функция $f(x) = x(1-x)^{99}$ принимает наибольшее значение? (Производной пользоваться нельзя.)

9. Найдите минимум выражения $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_4} + \frac{x_5}{x_6}$, если $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6 \leqslant 1000$.

10. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant abcd$.