

Замечательные линии в треугольнике

1. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по стороне и медианам, проведённым к двум другим сторонам.
2. Дан треугольник со сторонами 12, 15, 18. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большой стороне. Найдите отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.
3. Существует ли прямоугольный треугольник, в котором две медианы перпендикулярны?
4. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане CL . Докажите, что в треугольнике BKL также одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
5. Высота AA' , медиана BB' и биссектриса CC' треугольника ABC пересекаются в точке K . Известно, что $A'K = B'K$. Докажите, что и отрезок $C'K$ имеет ту же длину.
6. Докажите, что если в треугольнике провести прямые, симметричные высотам относительно соответственных (выходящих из тех же вершин) биссектрис, то эти прямые пересекутся в центре описанной окружности треугольника.
7. Пусть B' и C' — основания высот из, соответственно, вершин B и C треугольника ABC . Докажите, что $\triangle AB'C'$ подобен $\triangle ACB$ с коэффициентом $\cos A$.
8. Докажите, что $AH = BC \cdot |\operatorname{ctg} A|$.
9. Пусть A', B', C' — основания высот треугольника. Докажите, что ортоцентр является центром вписанной окружности $\triangle A'B'C'$.
10. Докажите, что если отразить ортоцентр треугольника симметрично относительно а) сторон, б) середин сторон, то полученная точка будет лежать на описанной окружности этого треугольника.
11. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H , а медианы — в точке O . Биссектриса угла A проходит через середину отрезка OH . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 2$, а разность углов B и C равна 30° .
12. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, если на плоскости отмечены три точки: O — центр описанной окружности, T — точка пересечения медиан и L — основание одной из высот этого треугольника.