

Связность графов

1. Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из каждого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?
2. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от каждого города можно добраться до любого другого.
3. Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 ребер. Доказать, что он остался связным.
4. В стране n городов. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, что из этих двух авиакомпаний хотя бы одна такова, что из любого города можно попасть в любой другой рейсами только этой авиакомпании.
5. В стране между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Известно, что первой авиакомпанией нельзя добраться из города A в город B , сделав менее двух пересадок. Докажите, что второй авиакомпанией можно добраться из любого города в любой, сделав не более двух пересадок.
6. Какое наименьшее число соединений требуется для организации проводной сети связи из 10 узлов, чтобы при выходе из строя любых двух узлов связи сохранялась возможность передачи информации между любыми двумя оставшимися (хотя бы по цепочке через другие узлы)?
7. Имеется волейбольная сетка размером 2016 на 2017 клеток. Петя разрезает одну из верёвочек (сторону клетки), потом Вася разрезает какую-то другую верёвочку, потом снова Петя и так далее. Проигрывает тот, после чьего хода сетка развалится на два куска. Кто выиграет при правильной игре?
8. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?
9. Клетчатая прямоугольная сетка $m \times n$ связана из верёвочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную верёвочку. Если не останется ни одного замкнутого верёвочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть?

10. Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причём каждый город связан (беспосадочными рейсами) не менее чем с n другими.
- Докажите, что если отменить любые $n - 1$ рейсов, то всё равно из любого города можно добраться в любой другой на самолётах (с пересадками).
 - Укажите все случаи, когда связность нарушается при отмене n рейсов.