

## Бином Ньютона

1. Докажите, что

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

2. Докажите, что

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$$

3. Сколько рациональных слагаемых содержится в разложении  $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{300}$ ?
4. Какое слагаемое в разложении  $(1 + \sqrt{3})^{100}$  будет наибольшим?
5. Вычислите суммы  $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$ ;  $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n$ ;  
 $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$
6. Используя формулы задач 1 и 2 докажите:

$$1) C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}, (0 \leq k \leq m \leq r)$$

$$2) C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$$

$$3) C_{m+n}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0$$

$$4) C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$$

7. Докажите, что  $2^n > (1 - x)^n + (1 + x)^n$  при целом  $n \geq 2$  и  $|x| < 1$
8. Сумма цифр натурального числа  $n$  равна 100. Может ли сумма цифр числа  $n^3$  равняться 1000000?
9. Решить в натуральных числах уравнение

$$x^{2y} + (x + 1)^{2y} = (x + 2)^{2y}$$

10. Докажите неравенство

$$\sin^{2n} x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 \leq 1$$