

Китайская теорема об остатках

Китайская теорема об остатках.

Предположим, что набор чисел $m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $(m_i, m_j) = 1 \quad \forall i \neq j$. Тогда для любых $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$ система (*) имеет единственное решение $\text{mod } m_1, m_2 \cdots m_r$.

$$(*) \begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1}; \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2}; \\ \vdots \\ x \equiv a_r \pmod{m_r}. \end{cases}$$

1. При каких целых n число $a_n = n^2 + 3n + 1$ делится на 55?
2. Юлик собрал мешочек монет. Вика пересчитала их, и оказалось, что если разделить все монеты на пять равных кучек, то останется две лишние монеты. А если на четыре равные кучки — останется одна лишняя монета. В то же время монетки можно разделить на три равные кучки. Какое наименьшее число монет могло быть у Юлика?
3. Докажите, что какое бы ни было $N \in \mathbb{N}$ найдутся N подряд идущих натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_N , таких что $a_1 : p_1^{2009}, a_2 : p_2^{2009}, \dots, a_N : p_N^{2009}$, где $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_N$ — первые N простых чисел.
4. Трехзначное число 625 обладает интересным свойством:

$$625^2 = 390\,625 \equiv 625 \pmod{1000}.$$

Сколько четырехзначных чисел удовлетворяют сравнению

$$x^2 \equiv x \pmod{10000}?$$

5. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (конечно, в каре должно быть более одного человека), но он не знает сколько солдат (от 1 до 37) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение. Например, войско из 9 человек можно поставить в виде квадрата 3×3 , а если один человек болен, то в виде двух квадратов 2×2 .
6. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные b_1, \dots, b_n (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + k) \dots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k , но должен быть больше 1.)