Малая теорема Ферма

Малая теорема Ферма. Пусть p – простое, $(a, p) = 1$. Тогда $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

1. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

2. При каких n число $n^{2001} - n^4$ делится на 11?

3. Пусть n — натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^8 - 1$ делится на 17.

4. Сумма трех чисел a, b и c делится на 30. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ также делится на 30.

5. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222} \,\vdots\, 7$.

6. Дана последовательность $a_n = 1^n + 2^n + \dots + 5^n$. Существуют ли 5 идущих подряд её членов, делящихся на 2015?

7. Докажите, что если p — простое число, $p \neq 2, 5$, то длина периода разложения $1/p$ в десятичную дробь делит $p - 1$. Приведите пример, когда длина периода совпадает с $p - 1$.

8. Докажите, что для любого простого p разность

$$11\ldots122\ldots233\ldots3\ldots99\ldots9 - 123\ldots9$$

делится на p (в первом числе каждая ненулевая цифра написана p раз).

9. (ВОШ 2008-2009, 10.8, 11.8) Даны натуральные $x, y \in [2, 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ — составное.