

## Планиметрия

1. В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  делят сторону  $AC$  так, что

$$AM : MN : NC = 1 : 2 : 3,$$

а точка  $P$  делит сторону  $AB$  так, что  $AP : PB = 3 : 1$ . Известно, что площадь треугольника  $PMN$  равна  $S$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

2. Точка  $M$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABM$ , в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник  $ACM$ . Может ли отрезок  $AM$  оказаться медианой треугольника  $ABC$ ?
3. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Точка  $K$  — середина стороны  $AB$ , точка  $M$  лежит на стороне  $BC$ , причем  $BM : MC = 1 : 3$ . На стороне  $AC$  выбрана точка  $P$  так, что периметр треугольника  $PKM$  наименьший из возможных. В каком отношении точка  $P$  делит сторону  $AC$ ?
4. Из точки  $T$  провели к окружности касательную  $TA$  и секущую, пересекающую окружность в точках  $B$  и  $C$ . Биссектриса угла  $ATC$  пересекает хорды  $AB$  и  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что

$$PA = \sqrt{PB \cdot QC}.$$

5. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с диаметром  $AD$ ; точка  $O$  пересечения его диагоналей  $AC$  и  $BD$  является центром другой окружности, касающейся стороны  $BC$ . Из вершин  $B$  и  $C$  проведены касательные ко второй окружности, пересекающиеся в точке  $T$ . Докажите, что точка  $T$  лежит на отрезке  $AD$ .
6. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  биссектриса угла  $D$  перпендикулярна стороне  $AB$  и пересекает ее в точке  $M$ . В каком отношении  $DM$  делит площадь трапеции, если длина отрезка  $AM$  в два раза больше длины отрезка  $MB$ ?
7. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  — середина стороны  $AB$ . Можно ли так расположить точки  $E$  и  $F$  на сторонах  $AC$  и  $BC$  соответственно, чтобы площадь треугольника  $DEF$  оказалась больше суммы площадей треугольников  $AED$  и  $BFD$ ?