

Планиметрия

1. В треугольнике ABC точки M и N делят сторону AC так, что

$$AM : MN : NC = 1 : 2 : 3,$$

а точка P делит сторону AB так, что $AP : PB = 3 : 1$. Известно, что площадь треугольника PMN равна S . Найдите площадь треугольника ABC .

2. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC . Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник ABM , в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ACM . Может ли отрезок AM оказаться медианой треугольника ABC ?
3. Дан равносторонний треугольник ABC . Точка K — середина стороны AB , точка M лежит на стороне BC , причем $BM : MC = 1 : 3$. На стороне AC выбрана точка P так, что периметр треугольника PKM наименьший из возможных. В каком отношении точка P делит сторону AC ?
4. Из точки T провели к окружности касательную TA и секущую, пересекающую окружность в точках B и C . Биссектриса угла ATC пересекает хорды AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что

$$PA = \sqrt{PB \cdot QC}.$$

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с диаметром AD ; точка O пересечения его диагоналей AC и BD является центром другой окружности, касающейся стороны BC . Из вершин B и C проведены касательные ко второй окружности, пересекающиеся в точке T . Докажите, что точка T лежит на отрезке AD .
6. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD биссектриса угла D перпендикулярна стороне AB и пересекает ее в точке M . В каком отношении DM делит площадь трапеции, если длина отрезка AM в два раза больше длины отрезка MB ?
7. В треугольнике ABC точка D — середина стороны AB . Можно ли так расположить точки E и F на сторонах AC и BC соответственно, чтобы площадь треугольника DEF оказалась больше суммы площадей треугольников AED и BFD ?