# Арифметика вычетов

**1.** Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ число $(2^n - 1)^n - 3$ делится на $2^n - 3$.

**2.** Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, дающих при делении на 4 остаток 3, т. е. простых чисел вида $4k+3$. То же для простых чисел вида $6n + 5$.

**3.** $(a, b, c)$ — пифагорова тройка ($a, b, c \in \mathbb{N}$, $a^2 + b^2 = c^2$). Докажите, что $abc \,\vdots\, 60$.

**4.** $p$, $p + 10$ и $p + 14$ — простые числа. Найдите $p$.

**5.** $p$, $4p^2 + 1$, $6p^2 + 1$ — простые числа. Найдите $p$.

**6.** Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком целом $n$.

**7.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы
**(a)** двух **(b)** трех
квадратов целых чисел.

**8.** Доказать, что нет такого числа в последовательности $11, 111, 1111, 11111, \cdots.$ которое является квадратом целого числа.

**9.** Докажите, что ни одно из чисел вида $10^{3n+1}$ нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

**10.** Решите сравнения:
**(a)** $8x \equiv 3 \pmod{13}$; **(b)** $7x \equiv 2 \pmod{11}$;
**(c)** $17x \equiv 1 \pmod{37}$; **(d)** $80x \equiv 17 \pmod{169}$.

**Определение.** Вычет $a$ называется *обратимым* по модулю $m$, если существует вычет $b$ (быть может, совпадающий с вычетом $a$) такой, что $a \cdot b \equiv 1 \pmod{m}$. В таком случае вычет $b$ называется *обратным* к $a$.

**11.** Вычет $a$ обратим по модулю $m$ тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(a, m) = 1$.

**12.** Докажите, что если вычет обратим, то обратный к нему единственный.

**13.** При каких условиях вычет обратен сам себе?

**14.** **Теорема Вильсона.** Докажите, что для простого $p$ выполнено сравнение $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.