Алгебра

9-11 класс

01.03.2017

1. Числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$. Докажите, что $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$.

2. Пара натуральных чисел $a < b \leq 2017$ обладает следующим удивительным свойством: если числа x и y не целые, а $x+y$ целое, то $ax+by$ — не целое. Сколько существует таких пар (a, b)?

3. Даны положительные числа a, b и c, причём $c \geq 1$. Докажите неравенство
$$\frac{1}{a^2 + abc} + \frac{1}{b^2 + abc} \leq \frac{2}{ab(c+1)}.$$

4. На доске записаны числа $1, 2, 3, 4, \ldots, 1000$. Вася за одну операцию может стереть любые два числа и написать вместо них либо их сумму, либо произведение. Можно ли после 999 операций получить число $1\,000\,000$.

5. Серёжа выписывает в строчку различные числа. Для каждого очередного числа среди написанных ранее количество чисел, бо́льших его, и количество чисел, меньших его, отличаются не более чем на 1. Известно, что 84-е число меньше, чем 219-е. Какое число больше: 83-е или 2017-е?

6. На предприятии работают несколько сотрудников, зарплата каждого составляет целое число тугриков (разные сотрудники могут иметь разную зарплату). Инкассаторы привезли на предприятие n монет по 1 тугрику, n монет по 2 тугрика, $\ldots$, n монет по 2017 тугриков. Привезённые деньги — это в точности суммарная зарплата всех сотрудников. При каком наибольшем количестве сотрудников зарплату заведомо удастся раздать (так, что каждый получит в точности причитающуюся ему сумму)?