

Вписанные четырехугольники

9-11 класс
21.01.2017

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность с центром в точке O . Окружности, описанные вокруг треугольников ABO и CDO , пересекались второй раз в точке F . Докажите, что точки A , F , D и точка E пересечения отрезков AC и BD лежат на одной окружности.
2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на стороне AD . Докажите, что точка O — центр вписанной окружности треугольника BMC .
3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N . Описанные окружности треугольников ANB и CND , повторно пересекают стороны BC и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 . Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром в точке N .
4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . Точки E и F — середины не содержащих других вершин дуг AB и CD соответственно. Прямые, проходящие через точки E и F параллельно диагоналям четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L . Докажите, что прямая KL содержит точку O .
5. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B , касается прямой BC , а окружность, проходящая через вершины B и C , касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K , отличной от B . Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что угол BKO — прямой.
6. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC . Найдите сумму углов $\angle B_2A_1C_2, \angle C_2B_1A_2$ и $\angle A_2C_1B_2$.
7. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q , лежащей внутри треугольника ACD . Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

Вписанные четырехугольники

9-11 класс
21.01.2017

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность с центром в точке O . Окружности, описанные вокруг треугольников ABO и CDO , пересекались второй раз в точке F . Докажите, что точки A , F , D и точка E пересечения отрезков AC и BD лежат на одной окружности.
2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на стороне AD . Докажите, что точка O — центр вписанной окружности треугольника BMC .
3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке N . Описанные окружности треугольников ANB и CND , повторно пересекают стороны BC и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 . Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром в точке N .
4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . Точки E и F — середины не содержащих других вершин дуг AB и CD соответственно. Прямые, проходящие через точки E и F параллельно диагоналям четырёхугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L . Докажите, что прямая KL содержит точку O .
5. В треугольнике ABC окружность, проходящая через вершины A и B , касается прямой BC , а окружность, проходящая через вершины B и C , касается прямой AB и пересекает первую окружность в точке K , отличной от B . Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что угол BKO — прямой.
6. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC . Найдите сумму углов $\angle B_2A_1C_2, \angle C_2B_1A_2$ и $\angle A_2C_1B_2$.
7. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q , лежащей внутри треугольника ACD . Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.