Теория чисел

9-11 класс

18.01.2017

1. Натуральные числа n и k $(n > k)$ таковы, что число $\frac{n!}{k!}$ оканчивается на 2017. Докажите, что число n также оканчивается на 2017.

2. Множество S состоит из чисел $1,\ 1+b,\ 1+b+b^2,\ \ldots$, где b — некоторое натуральное число. Докажите, что если два числа из S являются членами возрастающей арифметической прогрессии, то найдётся ещё одно число из S, также являющееся членом этой прогрессии.

3. Натуральное число n обладает следующим свойством: для любых натуральных чисел a и b число $(a+b)^n - a^n - b^n$ делится на n. Докажите, что $a^n - a$ делится на n для любого натурального a.

4. Каждое из натуральных чисел n, $n+1$ и $n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.

5. Робот загадал натуральное число от 1 до 2017. По нашей просьбе он может проделывать следующие операции:

- увеличить число в памяти на 1;
- уменьшить число в памяти на 1;
- сказать, является ли число в памяти точным квадратом.

Докажите, что не более чем за 300 операций мы можем узнать, какое число загадал робот.

6. На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3, …, 10. Разрешается выписать число a^2, если на доске уже имеется число a, или выписать наименьшее общее кратное чисел a и b, записанных на доске. Можно ли с помощью таких операций получить число $1\,000\,000$?

7. Пусть a и b — различные натуральные числа, большие $1\,000\,000$, и такие, что $(a+b)^3$ делится на ab. Докажите, что $|a-b| > 2017$.

Школа №444

Теория чисел

9-11 класс

18.01.2017

1. Натуральные числа n и k $(n > k)$ таковы, что число $\frac{n!}{k!}$ оканчивается на 2017. Докажите, что число n также оканчивается на 2017.

2. Множество S состоит из чисел $1,\ 1+b,\ 1+b+b^2,\ \ldots$, где b — некоторое натуральное число. Докажите, что если два числа из S являются членами возрастающей арифметической прогрессии, то найдётся ещё одно число из S, также являющееся членом этой прогрессии.

3. Натуральное число n обладает следующим свойством: для любых натуральных чисел a и b число $(a+b)^n - a^n - b^n$ делится на n. Докажите, что $a^n - a$ делится на n для любого натурального a.

4. Каждое из натуральных чисел n, $n+1$ и $n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.

5. Робот загадал натуральное число от 1 до 2017. По нашей просьбе он может проделывать следующие операции:

- увеличить число в памяти на 1;
- уменьшить число в памяти на 1;
- сказать, является ли число в памяти точным квадратом.

Докажите, что не более чем за 300 операций мы можем узнать, какое число загадал робот.

6. На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3, …, 10. Разрешается выписать число a^2, если на доске уже имеется число a, или выписать наименьшее общее кратное чисел a и b, записанных на доске. Можно ли с помощью таких операций получить число $1\,000\,000$?

7. Пусть a и b — различные натуральные числа, большие $1\,000\,000$, и такие, что $(a+b)^3$ делится на ab. Докажите, что $|a-b| > 2017$.