Степень точки

9-11 класс

05.11.2016

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

2. На сторонах угла с вершиной P выбраны точки A, B, C и D (A и B на одной стороне угла, C и D на другой). Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

5. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD; M — такая точка диагонали AC, что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

7. Даны окружность S и точки A и B вне её. Для каждой прямой ℓ, проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N, рассмотрим описанную окружность треугольника BMN. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B.

8. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

Школа №444

Степень точки

9-11 класс

05.11.2016

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

2. На сторонах угла с вершиной P выбраны точки A, B, C и D (A и B на одной стороне угла, C и D на другой). Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.

5. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA. Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L. Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD; M — такая точка диагонали AC, что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

7. Даны окружность S и точки A и B вне её. Для каждой прямой ℓ, проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N, рассмотрим описанную окружность треугольника BMN. Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B.

8. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.