

Двудольные графы

9-11 класс

19.10.2016

Граф — *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет рёбер с концами одинакового цвета.

- Пусть Γ — двудольный граф с чёрными и белыми вершинами. Докажите, что
 - Все циклы в графе Γ имеют чётную длину.
 - Если в Γ есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета — поровну.
 - Если в Γ есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то число белых вершин отличается от числа чёрных вершин не более, чем на 1.
- Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10, как на рисунке:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Женя прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый раз на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Женя была один раз, на клетке 2 — два раза, ..., на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Женя на клетке 10?

- Докажите, что если в графе нет циклов нечетной длины, то он двудольный. Какой критерий двудольности вы теперь можете сформулировать?
 - В каждой вершине связного графы изначально было записано по числу. На каждом ребре записали сумму чисел на его концах, а после этого стерли все числа на вершинах. В каких случаях однозначно можно определить какие числа изначально были записаны в каждой вершине?
- 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?
- Докажите, что следующий граф — двудольный: Вершины графа — расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.
 - На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.
- Каково наибольшее число рёбер в двудольном графе?
 - В строке из 11 целых чисел для каждой группы подряд идущих чисел (включая группы из одного числа тоже) подсчитана ее сумма. Каково наибольшее количество нечетных сумм?
- На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?