

## Признаки делимости

Группа 6-1

22.10.2016

1. (a) Сформулируйте и докажите признак делимости на 4.  
 (b) Сформулируйте и докажите признак делимости на 25.  
 (c) Сформулируйте и докажите признак делимости на  $2^k$  и на  $5^k$ .
2. Дома у Олега есть сейф, но кода он не знает. Бабушка рассказала Олегу, что код состоит из 7 цифр — двоек и троек, причем двоек больше, чем троек. А дедушка — что код делится и на 3, и на 4. Сможет ли Олег с первой попытки открыть сейф?
3. Вася написал на доске пример на умножение двух двузначных чисел, а затем заменил в нем все цифры на буквы, причём одинаковые цифры — на одинаковые буквы, а разные — на разные. В итоге у него получилось  
 (a)  $AB \times CD = EFFF$ .  
 (b)  $AB \times CD = EFFE$ .  
 Докажите, что он где-то ошибся.
4. Признак делимости на 11 звучит так: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой цифр на чётных местах и суммой цифр на нечётных местах делится на 11.  
 Например, рассмотрим число: 142536790. Посчитаем описанную выше разность, получается:  $(4 + 5 + 6 + 9) - (1 + 2 + 3 + 7 + 0) = 11$ . Из чего можно сделать вывод, что первоначальное число делится на 11.  
 (a) Докажите признак делимости на 11 для четырехзначных чисел.  
 (b) Докажите, что число вида  $100\dots 01$  с чётным числом нулей всегда делится на 11.  
 (c) Докажите признак делимости на 11.
5. Признак делимости на 7 можно сформулировать так: разобьём наше число на трёхзначные числа (начиная с разряда единиц) и рассмотрим разность суммы чётных по счёту трёхзначных чисел и суммы нечётных по счёту. Если получившийся результат делится на 7, то и первоначальное число делится на 7.  
 Например, рассмотрим число 789123456121. Оно разбивается на четыре трёхзначных числа: 789, 123, 456, 121. Посчитаем вышеописанную разность, получается:  $(789 + 456) - (123 + 121) = 1001$ . Это число делится на 7, тогда и первоначальное число делится на 7.  
 (a) Докажите признак делимости на 7 для 8-значных чисел.  
 (b) Докажите признак делимости на 7 для произвольных чисел.  
 (c) Сформулируйте аналогичный признак делимости на 13 и докажите его.
6. Вася выписал число  $\frac{1}{5^n}$  в виде десятичной дроби. Затем стер десятичную запятую и откинул нули, которые записаны в начале числа. Докажите, что получившееся число является степенью двойки. (Например:  $\frac{1}{125} = 0,008$ , а 8 — степень двойки)
7. Придумайте признак делимости на 101.
8. Существует ли такое десятизначное число  $n$ , что для любых ненулевых цифр  $a$  и  $b$  число  $\overline{anb}$  делится на  $\overline{ab}$ ?