

Три идеи чётности.

Сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна.

Пример. Кузнечик прыгает по прямой. Сначала — на 1 см, потом — на 3 см, потом — на 5 см, потом — на 7 см и т. д. Каждый раз кузнечик как угодно прыгает или влево или вправо. Мог ли после 57 прыжков кузнечик оказаться на том месте, откуда начинал прыгать?

Разбиение на пары. Оказывается, что если объекты *разбиваются на пары*, то их чётное число.

Пример. В Васином классе 15 мальчиков, некоторые поссорились друг с другом (ссоры взаимны). Могло ли случиться так, что каждый поссорился ровно с одним из остальных?

Чередование. Оказывается, что если по кругу *чередуются* стоят мальчики и девочки, то их поровну. А вместе их чётное число.

Пример. Петя ходил шахматным конём, начав с поля e2, и через несколько ходов вернулся на него же. Петя говорит, что сделал 201 ход. Не врёт ли он?

1. Не вычисляя сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2016^2$, выясните, чётна она или нечётна.
2. Вдоль забора растут восемь кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на единицу. Может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод?
3. 11 шестерёнок зацеплены по кругу. Может ли вся система вращаться?
4. Можно ли нарисовать такую замкнутую ломаную из 9-ти звеньев, чтобы каждое звено пересекалось ровно с одним другим звеном?
5. Может ли конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?
6. Найдутся ли такие натуральные числа a и b , что $ab(a + b) = 1001100110011001$?
7. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании голосовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда спикер объявил, что решение принято большинством в 23 голоса (то есть ЗА на 23 голоса больше, чем ПРОТИВ), оппозиция закричала: «Это обман!» Почему?
8. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел (то есть из чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...)?
9. Вася посчитал сумму всех чётных чисел от 1 до 1000, а Петя — сумму всех нечётных чисел от 1 до 1000. У кого сумма больше и на сколько? Выясните это, не вычисляя суммы явно.
10. Таблица 3×15 заполняется следующим образом: в первую строку записываются числа 1, 2, ..., во вторую — эти же числа, но в произвольном порядке. В третьей строке написаны суммы чисел из первой и второй строк. Докажите, что произведение чисел, стоящих в третьей строке, чётно.
11. Марьянна написала на доске 2015 слагаемых. Докажите, что Вася всегда сможет стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся была чётной. Верно ли это, если Марьянна написала 2014 слагаемых?