Дискретная непрерывность.

1. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары — чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

2. Первый тайм футбольного матча закончился со счётом 0 : 1, а матч — со счётом 4 : 3. Докажите, что в некоторый момент счёт на табло был ничейным.

3. В стране Ш. человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин. (Все зарплаты в стране различные.)

4. а) В ряд стоят 30 сапог: 15 правых и 15 левых. Обязательно ли среди них найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых?

   б) А обязательно ли найдутся 7 таких сапог?

   в) А 20 сапог?

   в) А если они стоят по кругу?

5. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

6. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдётся чётное число.

7. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже чем на двадцать пятый день?

8. Несколько школьников играют в турнир по шашкам навылет: они выстроились в очередь и каждую партию играют победитель прошлой и школьник с наименьшим номером в очереди, не игравший ещё ни разу. На следующий день они провели турнир-реванш, который сыграли по таким же правилам, но очередь была построена наоборот — последний в первый день во второй раз имел номер 1 и так далее. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли вместе в оба дня.

9. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

Дискретная непрерывность.

1. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары — чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

2. Первый тайм футбольного матча закончился со счётом 0 : 1, а матч — со счётом 4 : 3. Докажите, что в некоторый момент счёт на табло был ничейным.

3. В стране Ш. человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин. (Все зарплаты в стране различные.)

4. а) В ряд стоят 30 сапог: 15 правых и 15 левых. Обязательно ли среди них найдутся 10 сапог, стоящих подряд, среди которых поровну правых и левых?

   б) А обязательно ли найдутся 7 таких сапог?

   в) А 20 сапог?

   в) А если они стоят по кругу?

5. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

6. В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдётся чётное число.

7. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже чем на двадцать пятый день?

8. Несколько школьников играют в турнир по шашкам навылет: они выстроились в очередь и каждую партию играют победитель прошлой и школьник с наименьшим номером в очереди, не игравший ещё ни разу. На следующий день они провели турнир-реванш, который сыграли по таким же правилам, но очередь была построена наоборот — последний в первый день во второй раз имел номер 1 и так далее. Докажите, что найдутся два школьника, которые играли вместе в оба дня.

9. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.