

Алгоритм Евклида

7–8 класс

16.05.2017

Обозначение. $\text{НОД}(a, b) = (a, b)$, $\text{НОК}(a, b) = [a, b]$.

Определение. Если $(a, b) = 1$, то числа a и b называются *взаимно простыми*.

1. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство $(a, b) \cdot [a, b] = ab$.
2. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+1}$ несократима.
3. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 2000?
4. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3m-n}{5n+2m}$, если известно, что она сократима и что числа m и n взаимно просты.
5. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:
(a) ровно в шесть раз;
(b) ровно в пять раз?
6. В прямоугольном бильярде размером $p \times 2q$, где p и q — нечётные числа, сделаны лузы в каждом углу и в середине каждой стороны длины $2q$. Из угла выпущен шарик под углом 45° к стороне. Доказать, что шарик обязательно попадет в одну из средних луз.