

## Алгоритм Евклида

7–8 класс

12.05.2017

**Определение 1.** Наибольшим общим делителем двух целых чисел называется такой их общий делитель, который больше всех остальных общих делителей.

**Определение 2.** Наименьшим общим кратным двух целых чисел называется наименьшее положительное число, делящееся на оба этих числа.

**Обозначение.**  $\text{НОД}(a, b) = (a, b)$ ,  $\text{НОК}(a, b) = [a, b]$ .

**Определение 3.** Если  $(a, b) = 1$ , то числа  $a$  и  $b$  называются *взаимно простыми*.

**Алгоритм Евклида.**

Пусть  $a$  и  $b$  – целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел  $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \dots > r_n$  определена тем, что каждое  $r_k$  – это остаток от деления предыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть

$$a = b \cdot q_0 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3$$

...

$$r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_{k-1} + r_k$$

...

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n$$

Тогда  $(a, b) = r_n$ .

**Упражнение.** Найдите **а)** (1333, 372); **б)** (561, 4301); **в)** (9163, 3311).

1. Докажите следующие свойства НОД и НОК:
  - а)** если  $m$  делится на  $n$ , то  $(m, n) = n$ ,  $[m, n] = m$ ;
  - б)**  $(a \cdot m, a \cdot n) = a \cdot (m, n)$ ;
  - в)** если  $(m, n) = d$ , то  $(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$ ;
  - г)** для любого целого числа  $a$  справедливо, что  $(m, n) = (m - a \cdot n, n)$ ;
  - д)**  $(m, n) \cdot [m, n] = m \cdot n$ .
2. **а)** Докажите, что  $(n + 3, 5n + 14)$  взаимно просты при любом целом  $n$ .  
**б)** Какие значения может принимать  $(3n + 2, 10n + 23)$ .
3. Вася посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Петя – всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?
4. Пусть  $m, n$  – целые взаимнопростые числа. Найдите наибольшее возможное значение

$$(n + 2016m, m + 2016n).$$

5. Пусть  $a$  и  $b$  – натуральные числа. Докажите, что среди чисел  $a, 2a, 3a, \dots, ba$  ровно  $(a, b)$  чисел делится на  $b$ .
6. Изначально на доске записаны числа  $m$  и  $n$ . Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?