Сравнения

7–8 класс

18.04.2017

Определение. Если два числа дают одинаковые остатки при делении на число m, то говорят, что они сравнимы по модулю m. Записывают это так: $a \underset{m}{\equiv} b$ или $a \equiv b \pmod{m}$.

Упражнение. Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда число $a - b$ сравнимо с 0 по модулю m.

Свойства сравнений:

(a) если $a \underset{m}{\equiv} b$, $b \underset{m}{\equiv} c$, то $a \underset{m}{\equiv} c$;

(b) $a \underset{m}{\equiv} a + km$, где k — целое число;

(c) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + c$;

(d) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + d$;

(e) если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $ac \underset{m}{\equiv} bc$;

(f) если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $ac \underset{m}{\equiv} bd$.

1. Доказать упражнение и все свойства сравнений.

2. **(a)** Докажите, что если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a^k \underset{m}{\equiv} b^k$, где k — натуральное число.

(b) Приведите пример, когда $ac \underset{m}{\equiv} bc$, но не выполняется $a \underset{m}{\equiv} b$.

(c) Сформулируйте, когда можно сокращать на одно и то же число обе части сравнения, и докажите это свойство.

3. Найдите остаток от деления:

(a) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 11;

(b) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000;

(c) $2015 \cdot 2014 \cdot 2013 + 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 2016.

4. Найдите остаток от деления:

(a) $9^{2016} + 13^{2016}$ на 11;

(b) $9^{2015} + 13^{2015}$ на 11.

5. **(a)** Докажите, что $2^{2016} \underset{5}{\equiv} 3^{2016}$.

(b) Докажите, что $2^{2016} \underset{13}{\equiv} 3^{2016}$.

(c) Найдите еще хотя бы одно простое число p, для которого $2^{2016} \underset{p}{\equiv} 3^{2016}$.

6. Пусть A — произведение всех нечётных чисел от 1 до 2017, а B — произведение всех чётных чисел от 2 до 2018. Докажите, что $A + B$ делится на 2019.

7. Докажите, что число $(5^n - 1)^n - 6$ делится на $5^n - 6$.

8. Первоклассник Петя знает только цифры 1 и 2. Докажите, что он может написать число, делящееся на 123456789.

9. Число $1\underbrace{33\ldots33}_{k}$ — простое. Докажите, что k — нечетное.