

Тождества

7–8 класс

10.03.2017

1. Известно, что $a - \frac{b^2}{a} = b - \frac{a^2}{b}$. Верно ли, что $a = b$?
2. На доске была написана несократимая дробь. Петя уменьшил её числитель на 1, а знаменатель на 2. А Вася прибавил к числителю 1, а знаменатель оставил без изменений. Оказалось, что в результате мальчики получили одинаковые значения. Какой именно результат у них мог получиться?
3. Известно, что $x + \frac{1}{x} = 2017$. Найдите $\frac{x}{x^2 + x + 1}$.
4. Найдите $x + y$, если $x^3 + y^3 = 9$, а $x^2y + xy^2 = 6$.
5. Числа x и y таковы, что $x + y = xy = 17$. Найдите значение выражения

$$(x^2 - 17x) \left(y + \frac{17}{y} \right).$$

6. (а) Числа $a, b, \frac{ab}{a+b}$ — натуральные. Докажите, что число $\frac{a^2 + b^2}{a+b}$ — тоже натуральное.
 (б) Числа $a, b, c, \frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$ — натуральные. Докажите, что число $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c}$ — тоже натуральное.
7. Известно, что $a+b+c+d = 6$. Может ли сумма $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ равняться 18?
8. Найдите значение выражения:

$$\frac{(2+3) \cdot (2^2+3^2) \cdot (2^4+3^4) \cdot \dots \cdot (2^{512}+3^{512}) + 2^{1024}}{3^{1024}}.$$

9. Найдите все натуральные значения n , для которых число
 (а) $n^4 + n^2 + 1$,
 (б) $n^5 + n + 1$
 является простым.