

Делимость

Группа 7–8

9.12.2016

1. Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.
2. Вася написал на доске два числа, перемножил их и получил четырёхзначное число. После этого он заменил буквы на числа, причём разным числам соответствуют разные буквы. В итоге получилось $AB \cdot CD = EEFF$. Докажите, что Вася ошибся.
3. Найдите 10 различных натуральных чисел, обладающих тем свойством, что их сумма делится на каждое из них.
4. Существует ли натуральное число, кратное 2016, сумма цифр которого равна 2016?
5. На 99 карточках пишутся числа 1, 2, 3, ..., 99. Затем карточки перемешиваются, раскладываются чистыми сторонами вверх и на чистых сторонах снова пишутся числа 1, 2, 3, 4, ..., 99. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются и 99 полученных сумм перемножаются. Доказать, что в результате получится чётное число.
6. Пусть $k > 2$ — нечётное натуральное число. Докажите, что для любого натурального n число $1^{k^n} + 2^{k^n} + \dots + (k-1)^{k^n}$ делится на k .
7. На очень большой и длинной доске записано число 11^{2016} . Потом вместо этого числа записали сумму его цифр. Затем снова вместо полученного числа записали сумму его цифр. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется однозначное число. Найдите это число.
8. Может ли $5^n - 1$ делиться на $4^n - 1$ при натуральном n ?