

Десятичная запись числа

Группа 7–8

25.10.2016

1. (a) Сумма цифр a и b равна 7. Докажите, что число вида \overline{aba} делится на 7.
(b) Сумма цифр a и b равна 7. Докажите, что число вида $\overline{aab0b}$ делится на 7.
2. Найдите все натуральные числа, равные удвоенной сумме своих цифр. (Не забудьте доказать, что других нет)
3. Докажите, что число вида \overline{abcabc} всегда делится на 13.
4. Сформулируйте и докажите признак делимости на 9
(a) для трехзначных чисел;
(b) для произвольных чисел.
5. Есть быстрый способ посчитать квадрат числа, оканчивающегося на цифру 5. Например, наши действия при возведении в квадрат 75:
 - Отбрасываем у числа последнюю цифру, получаем 7;
 - Умножаем получившееся число на следующее натуральное число и записываем результат, получаем $7 \times 8 = 56$;
 - Приписываем справа 25, получаем 5625;
 - $75^2 = 5625$. Profit!

Докажите этот факт для произвольного числа, оканчивающегося на 5.

6. Есть быстрый способ посчитать произведение двузначных чисел. Например, наши действия при перемножении 92 на 89:
 - Вычисляем, на сколько числа меньше 100, получаем $100 - 92 = 8$ и $100 - 89 = 11$;
 - Вычитаем из 100 сумму полученных чисел, получаем $100 - 8 - 11 = 81$;
 - Считаем произведение полученных чисел $8 \times 11 = 88$ и приписываем справа;
 - Получаем $92 \times 89 = 8188$. Profit!

Для каких двузначных чисел работает такой вариант быстрого счета и почему?

7. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 99, в десятичной записи которого участвуют только чётные цифры.