Разнообразная геометрия

9 класс

14.05.2016

1. На хорде AB окружности ω с центром O отмечена точка X. Описанная окружность треугольника AXO вторично пересекает ω в точке Y. Докажите, что $XY = XB$.

2. На полуокружности с диаметром AB отмечены точки P и Q, в которых восстановлены касательные к этой полуокружности, пересекающиеся в точке S. Пусть H — проекция S на AB. Докажите, что HS — биссектриса угла PHQ.

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Оказалось, что вписанные окружности треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что и вневписанные окружности тех же треугольников равны.

4. На описанной окружности остроугольного треугольника ABC отмечены такие точки D и E, что $BD \perp AC$, AE — диаметр. Докажите, что площади треугольника ABC и четырёхугольника $AECD$ равны.

5. Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке D. Точка E — середина A_1D. Докажите, что длина отрезка DE совпадает с длиной отрезка касательной из точки E к описанной окружности треугольника ABC.

6. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность с центром I и касается его стороны BC в точке K. На сторонах AB, AC отмечены точки P и Q соответственно, что $AP = CK$, $AQ = BK$; AD — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $PQ \perp DI$.

7. В угол BAC вписана окружность с центром O, касающаяся его сторон в точках B и C. Внутри угла отмечена точка X; K — проекция O на AX. Описанные окружности треугольников BKX и CKX вторично пересекают прямую KO в точках P и Q. Докажите, что O — середина PQ.

8. Диагональ AC описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекает вписанную в него окружность в точках P и Q; M — середина PQ. Докажите, что $\angle AMB = \angle AMD$.