

Лемма о трезубце

9 класс

16.04.2016

0. (Лемма о трезубце) Пусть I и I_A — центры вписанной и невписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Докажите, что точки B, C, I, I_A лежат на одной окружности с центром в середине «меньшей» дуги BC описанной окружности треугольника ABC .
1. Сформулируйте и докажите лемму о трезубце для середины дуги BAC описанной окружности треугольника ABC (от каких четырёх точек она равноудалена?).
2. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Отметили центры окружностей, вписанных в треугольники $B, C, D, C, D, A, D, A, B, A, B, C$. Докажите, что отмеченные точки являются вершинами прямоугольника.
3. На «меньших» дугах AB, AC описанной окружности треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACN равноудалены от середины дуги BAC .
4. В треугольнике ABC ($AB < BC$) M — середина AC , N — середина дуги ABC описанной окружности треугольника. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.
5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Внешние биссектрисы пар углов $\angle A$ и $\angle B$, $\angle B$ и $\angle C$, $\angle C$ и $\angle D$, $\angle D$ и $\angle A$ пересекаются в точках P, Q, R, S соответственно. Оказалось, что описанные окружности треугольников ABP, CDR касаются (внешним образом). Докажите, что описанные окружности треугольников BCQ, DAS тоже касаются.
6. На сторонах AB и AC треугольника ABC ($AB > AC$) выбраны точки M и N соответственно так, что $BM = CN$. Прямые MN и BC пересекаются в точке K . Пусть P — центр вписанной окружности треугольника BMK , а Q — центр невписанной окружности треугольника CNK , касающейся стороны CN . Докажите, что середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC равноудалена от точек P и Q .