Поехавшие точки и леммы о воробьях

9 класс

19.03.2016

0. (Задача-напоминание того, что происходило в предыдущем листике, сдавать не нужно)

   По двум пересекающимся в точке P прямым с постоянными не обязательно равными скоростями $\vec{u}$ и $\vec{v}$ едут две точки X_t и Y_t. Тогда описанные окружности всех треугольников PX_tY_t при всех $t \in \mathbb{R}$ проходят через фиксированную точку Z, которая является центром поворотной гомотетии, переводящей точку X_0 + вектор её скорости $\vec{u}$ в точку Y_0 + вектор её скорости $\vec{v}$.

1. Пусть в обозначениях предыдущей задачи скорости равны: $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. Докажите, что центр поворота, переводящего $\forall\, t \in \mathbb{R}$ точки X_t в Y_t, лежит на биссектрисе угла между траекториями.

2. (*Леммы о воробьях*) На сторонах AB, AC треугольника ABC отмечены точки C_1, B_1 соответственно. Пусть I — центр вписанной в треугольник окружности, а A_0 — середина дуги BAC описанной окружности.

   а) Докажите, что $BC_1 = CB_1$ тогда и только тогда, когда A, B_1, C_1, A_0 лежат на одной окружности.

   б) Докажите, что $BC_1 + CB_1 = BC$ тогда и только тогда, когда A, B_1, C_1, I лежат на одной окружности.

3. Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. В треугольник ABC вписана окружность с центром I. Пусть I_A и O_A — центры вписанной и описанной окружностей треугольника AB_1C_1 соответственно; I_B, O_B, I_C, O_C определяются аналогично.

   а) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$ совпадает с I.

   б) Докажите, что центр вписанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$ совпадает с I.

4. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает стороны BC, CD в точках P и Q. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CPQ лежит на описанной окружности треугольника BCD.

5. На сторонах BC, CA, AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) выбраны такие точки X, Q, P соответственно, что $APXQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

6. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Пусть K — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной BC. Докажите, что $\angle I_1KI_2 = 90^\circ$.

7. (*11.8 финала всероссийской олимпиады 2011, страшно?*) Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.