

Спиральное подобие

9 класс
12.03.2015

Определение. *Поворотной гомотетией* (или *спиральным подобием*) называют композицию поворота и гомотетии с центром в одной и той же точке.

0. На плоскости даны две точки A и A' , из которых торчат векторы \vec{w} и \vec{w}' соответственно. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия/параллельный перенос, переводящий A в A' и \vec{w} в \vec{w}' . Какие у этой поворотной гомотетии параметры? Как найти её центр?
1. Даны две окружности, на каждой из которых отмечена точка. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия/параллельный перенос, переводящий окружность в окружность и совмещающий точки.
2. Две окружности пересекаются в точках M и N . Прямая, проходящая через N , пересекает вторично первую окружность в точке A_1 , вторую — в A_2 . Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей первую окружность во вторую и A_1 в A_2 , лежит в M .
3. Пять окружностей проходят через точку P . На первой окружности отмечается точка X_1 . Прямая, проходящая через X_1 и точку пересечения первой и второй окружности, отличную от P , пересекает вторую окружность в точке X_2 . Аналогично определяются точки X_3, X_4, X_5, X_6 (X_6 вновь на первой окружности). Докажите, что $X_1 = X_6$.
4. Точки A, B, C, D общего положения. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей A в B и C в D , совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей A в C и B в D .
5. В условиях задачи 2 найдите геометрическое место середин всех отрезков A_1A_2 .
6. На столе лежат двое правильно идущих часов циферблатом вверх. Докажите, что середина отрезка, соединяющего концы минутных стрелок, движется по окружности.
7. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены точки A', B', C' соответственно. Докажите, что треугольник с вершинами в центрах описанных окружностей треугольников $AB'C', BC'A', CA'B'$ подобен треугольнику ABC .
8. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены точки A', B', C' соответственно, так что треугольники ABC и $A'B'C'$ соответственно подобны и одинаково ориентированны. Точки B' и C' стёрли. С помощью циркуля и линейки восстановите их. Как устроены все такие треугольники $A'B'C'$?
9. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC . Найдите сумму углов $C_2A_1B_2, A_2B_1C_2$ и $B_2C_1A_2$.