Поехавшие точки

9 класс

27.02.2016

Определение. Пусть для каждого $t \in \mathbb{R}$ определена точка $A(t)$, вектор $\vec{a}(t)$ или прямая $\ell(t)$. Будем говорить, что $A(t)$, $\vec{a}(t)$ или $\ell(t)$) *линейно зависит от* t или просто *линейно движется*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что $A(t) = A(0) + t \cdot \vec{v}$, $\vec{a}(t) = \vec{a}(0) + t \cdot \vec{v}$ или $\ell(t) = \ell(0) + t \cdot \vec{v}$ соответственно. Под обозначением «объект $+\vec{v}$» имеется ввиду объект, перенесённый на вектор $\vec{v}$.

1. Докажите или опровергните:

   а) Вектор, соединяющий две линейно движущиеся точки, меняется линейно.

   б) Середина отрезка, соединяющего две линейно движущиеся точки, движется линейно.

   в) Прямая, соединяющая две линейно движущиеся точки, движется линейно.

   г) Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.

   д) Проекция линейно движущейся точки на неподвижную прямую движется линейно.

2. Докажите утверждения:

   а) Если две линейно движущиеся точки совпадают при двух значениях параметра t, то они совпадают всегда.

   б) Если три линейно зависящие от t прямые пересекаются в одной точке при двух значениях параметра t, то они всегда пересекаются в одной точке.

   в) Если линейно меняющиеся векторы перпендикулярны при трёх значениях параметра t, то они всегда перпендикулярны.

   г) Если линейно меняющиеся векторы коллинеарны при трёх значениях параметра t, то они всегда коллинеарны.

   д) Если существуют три момента времени, когда три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой, то они всегда лежат на одной прямой.

3. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

4. Диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны. Докажите, что перпендикуляры из середин двух соседних сторон к противоположным сторонам пересекаются на диагонали.

5. Некоторая окружность с центром в точке I пересечения биссектрис треугольника ABC пересекает стороны треугольника в точках A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B (обозначения:точка X_Y лежит на стороне напротив вершины X и ближе к точке Y, $X, Y = A, B, C$). Докажите, что прямая, соединяющая A с точкой пересечения C_BA_B и B_CA_C, делит отрезок A_BA_C пополам.

6. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB, AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причём $\angle AB_1M = \angle AC_1M$. Докажите что перпендикуляры, восстановленных из точке B_1, C_1, M к сторонам треугольника, на которых они лежат, пересекаются в одной точке.

7. (*Прямая Гаусса*) На плоскости проведено четыре прямые общего положения. Докажите, что середины отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся, лежат на одной прямой.

8. К двум не пересекающимся окружностям проведены внешняя PM и внутренняя QN касательные. Точки P, Q лежат на одной из окружностей; M, N — на другой. Докажите, что точка пересечения PQ и MN лежит на линии центров.

9. На сторонах AB, AC треугольника ABC отмечены точки B_1, C_1 соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1, перпендикулярна прямой, соединяющей точки пересечения медиан треугольников ABC_1 и AB_1C.