Отражение ортоцентра, часть 2

9 класс

20.02.2016

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются ортоцентры треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1, равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

2. Пусть S — проекция ортоцентра H остроугольного треугольника ABC на касательную к описанной окружности, восстановленную в точке A, а M — середина стороны BC. Докажите, что треугольник AMS равнобедренный.

3. В остроугольном треугольнике ABC отмечен ортоцентр H и середина M стороны BC. Прямая, проходящая через H и перпендикулярная HM, пересекает стороны AC, AB в точках B_1, C_1. Докажите, что H — середина отрезка B_1C_1.

4. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка P служит точкой пересечения отрезков AH и B_1C_1. Прямая AO пересекает отрезок BC в точке Q (O — центр описанной окружности треугольника ABC), а M — середина BC. Докажите, что прямые MH и PQ параллельны.

5. На окружности даны четыре точки. Для каждой из них строится прямая Симсона относительно треугольника, образованного тремя другими. Докажите, что четыре построенные таким образом прямые пересекаются в одной точке.

6. Биссектриса острого угла между высотами, выходящими из вершин B и C остроугольного треугольника ABC, пересекает стороны AB, AC в точках P и Q. M — середина BC. А ещё в задаче есть точка R пересечения биссектрисы угла BAC с отрезком HM. Докажите, что точки A, P, R, Q лежат на одной окружности.

7. В окружность вписан шестиугольник, множество вершин которого разбито случайным образом на два подмножества по три вершинки. Ортоцентр треугольника, образованного первыми тремя вершинками, соединили отрезком с точкой пересечения медиан треугольника из трёх оставшихся вершин. Докажите, что все отрезки, полученные таким образом при всевозможных разбиениях, пересекаются в одной точке.

8. Касательные к описанной окружности остроугольного треугольника ABC, восстановленные в вершинах B и C, пересекаются в точке S. Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника, опущенных из его вершин A, B, C соответственно, а M — середина BC. Докажите, что прямые MH, B_1C_1 и SA_1 пересекаются в одной точке.