

Лемма о проекции вершины на биссектрису

9 класс
13.02.2016

- (Лемма о проекции вершины на биссектрису) Пусть B_C — проекция вершины B треугольника ABC на биссектрису угла C , I — центр вписанной окружности. Докажите утверждения:
 - B_C лежит на биссектрисе угла C треугольника ABC ;
 - B_C лежит на средней линии, параллельной стороне AC ;
 - B_C лежит на окружности, построенной на отрезке BI как на диаметре;
 - B_C лежит на прямой, соединяющей точки касания вписанной в треугольник окружности со сторонами AB , AC ;
 - B_C лежит на прямой, соединяющей точки касания невписанной окружности треугольника со стороной AB и продолжением стороны AC .
 - Пусть $B_{C'}$ — проекция вершины B треугольника ABC на биссектрису внешнего угла при вершине C . Сформулируйте самостоятельно и докажите утверждения, аналогичные задаче 1.
-
- Докажите, что проекции вершины A треугольника ABC на биссектрисы внутренних и внешних углов при вершинах B и C лежат на одной прямой.
 - Пусть B_C и C_B — проекции вершин B и C неравнобедренного треугольника ABC на биссектрисы углов при вершинах C , B соответственно. А ещё B_1 — середина AC , C_1 — середина AB . Докажите, что прямые C_1B_C и B_1C_B пересекаются на стороне BC .
 - Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Прямая, проходящая через A параллельно B_1A_1 , пересекает прямую C_1A_1 в точке X . Прямая, проходящая через A параллельно C_1A_1 , пересекает B_1A_1 в точке Y . Докажите, что прямая XY параллельна BC .
 - На стороне AB прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$) нашлась такая точка X , что $\angle AXD = \angle BXC$. Пусть Y — проекция точки X на прямую CD . Докажите, что описанная окружность треугольника ABY проходит через середину CD .
 - В треугольнике ABC ($AB > AC$) проведены биссектриса AL и медиана AM . Прямая, проведённая через M параллельно стороне AB , пересекает AL в точке D . Прямая, проведённая через L параллельно стороне AC , пересекает AM в точке E . Докажите, что $ED \perp AD$.
 - Невписанная в треугольник ABC окружность с центром I_A (соответствующая вершине A) касается его сторон/продолжений сторон в точках A_1 , B_1 , C_1 . Пусть P и Q — точки пересечения пар прямых A_1C_1 и CI_A , A_1B_1 и BI_A . AP и AQ пересекают BC в точках M , N . Докажите, что точка A_1 — середина MN .