

Ещё один разнбой

9 класс

23.01.2016

1. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного этими перпендикулярами шестиугольника равна половине площади треугольника.
2. Две окружности касаются в точке A . Из точки X плоскости проведены касательные XB к первой окружности и XC ко второй (B лежит на первой окружности, C — на второй). Докажите, что центр описанной окружности треугольника BAC лежит на описанной окружности треугольника BXC .
3. Докажите, что прямая, соединяющая проекции ортоцентра остроугольного треугольника ABC на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла при вершине A , проходит через середину BC .
4. Высоты BB_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Описанная окружность треугольника BCH вторично пересекает отрезки AB и AC в точках C_2 и B_2 . Докажите, что $2B_1C_1 = B_2C_2$.
5. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки B' и C' симметричны соответственно вершинам B и C относительно прямых AC и AB . Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC' , отличная от A . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA .
6. Пусть A' — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC . Прямая a проходит через точку A' и параллельна биссектрисе внутреннего угла A . Аналогично строятся прямые b и c . Докажите, что прямые a , b и c пересекаются в одной точке.
7. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка T . Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT , DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD .
8. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB , в точке C' . Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой Эйлера треугольника ABC .