

16 января 2016 г.

Разной по геометрии

1. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D . На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC . Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

2. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B . Касательная к S_1 в точке B пересекает S_2 в точках B и P ; касательная к S_2 в точке B пересекает S_1 в точках B и Q . Прямая QA пересекает S_2 в точках A и R . Докажите, что $BR = BP$.

3. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB .

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1 . На стороне AB выбрана такая точка K , что $BK = BA_1$. Биссектриса угла C пересекает отрезок KA_1 в точке P . Докажите, что $PA = PA_1$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω , описанную вокруг треугольника ABC , в точке E . Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F . Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω .

6. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает прямые BA и BC в точках B_1 и B_2 . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые CA и CB в точках C_1 и C_2 . Описанные окружности треугольников CC_1C_2 и BB_1B_2 пересекаются в точках P и Q . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PQ .

7. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1 , лежит на стороне BC .

16 января 2016 г.

Разной по геометрии

1. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D . На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC . Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F . Докажите, что прямые EF и BC параллельны.

2. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B . Касательная к S_1 в точке B пересекает S_2 в точках B и P ; касательная к S_2 в точке B пересекает S_1 в точках B и Q . Прямая QA пересекает S_2 в точках A и R . Докажите, что $BR = BP$.

3. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB .

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1 . На стороне AB выбрана такая точка K , что $BK = BA_1$. Биссектриса угла C пересекает отрезок KA_1 в точке P . Докажите, что $PA = PA_1$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором угол ABC тупой. Прямая AD пересекает второй раз окружность ω , описанную вокруг треугольника ABC , в точке E . Прямая CD пересекает второй раз окружность ω в точке F . Докажите, что центр описанной окружности треугольника DEF лежит на окружности ω .

6. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает прямые BA и BC в точках B_1 и B_2 . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые CA и CB в точках C_1 и C_2 . Описанные окружности треугольников CC_1C_2 и BB_1B_2 пересекаются в точках P и Q . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PQ .

7. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1 , лежит на стороне BC .