

Определение. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

1. Докажите, что точки, симметричные данной относительно середин сторон некоторого квадрата, образуют квадрат.

2. В окружности ω проведена хорда AB . Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC , где $C \in \omega$.

3. а) **Лемма Архимеда.** В окружности ω проведена хорда AB . Рассмотрим окружность, касающуюся хорды AB и данной дуги AB . Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания, проходит через середину оставшейся дуги AB .

б) Пусть окружность касается данной дуги AB и продолжения хорды AB за точку B . Докажите, что прямые, соединяющие две точки касания, проходят через фиксированную точку.

4. На прямоугольном столе лежит n кругов радиусом R так, что никакие два не имеют общих внутренних точек. Верно ли, что на этом столе можно разместить $4n$ кругов радиусом $R/2$ так, чтобы никакие два не имели общих внутренних точек?

5. а) Докажите, что неравные треугольники с попарно параллельными сторонами гомотетичны.

б) В треугольнике ABC точки I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно, A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые I_aA_1, I_bB_1, I_cC_1 пересекаются в одной точке.

с) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

6. Даны две концентрические окружности. Постройте прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

7. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC , проходящие через M . Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC , касаются некоторой фиксированной окружности.

8. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K . Окружность ω_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD , причём вторая точка пересечения ω_1 с диагональю AC лежит на отрезке AK . Окружность ω_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD , причём вторая точка пересечения ω_2 с диагональю AC лежит на отрезке KC . Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей ω_1 и ω_2 , будут параллельны между собой.

Определение. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' такую, что $\vec{OA'} = k\vec{OA}$.

1. Докажите, что точки, симметричные данной относительно середин сторон некоторого квадрата, образуют квадрат.

2. В окружности ω проведена хорда AB . Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC , где $C \in \omega$.

3. а) **Лемма Архимеда.** В окружности ω проведена хорда AB . Рассмотрим окружность, касающуюся хорды AB и данной дуги AB . Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания, проходит через середину оставшейся дуги AB .

б) Пусть окружность касается данной дуги AB и продолжения хорды AB за точку B . Докажите, что прямые, соединяющие две точки касания, проходят через фиксированную точку.

4. На прямоугольном столе лежит n кругов радиусом R так, что никакие два не имеют общих внутренних точек. Верно ли, что на этом столе можно разместить $4n$ кругов радиусом $R/2$ так, чтобы никакие два не имели общих внутренних точек?

5. а) Докажите, что неравные треугольники с попарно параллельными сторонами гомотетичны.

б) В треугольнике ABC точки I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB соответственно, A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые I_aA_1, I_bB_1, I_cC_1 пересекаются в одной точке.

в) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

6. Даны две концентрические окружности. Постройте прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

7. Дана окружность, точка A на ней и точка M внутри нее. Рассматриваются хорды BC , проходящие через M . Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников ABC , касаются некоторой фиксированной окружности.

8. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K . Окружность ω_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD , причём вторая точка пересечения ω_1 с диагональю AC лежит на отрезке AK . Окружность ω_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD , причём вторая точка пересечения ω_2 с диагональю AC лежит на отрезке KC . Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей ω_1 и ω_2 , будут параллельны между собой.