# Ориентированные углы

*9 класс*

*10.10.2015*

*Ориентированным углом* между прямыми $k$ и $l$ называют угол, на который надо повернуть прямую $k$ против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную $l$ (обозначение: $\angle(k,l)$). Ориентированные углы, отличающиеся на кратное 180 число градусов, считаются равными. В этом случае пишут $\angle(k_1,l_1) \equiv \angle(k_2,l_2)$. Очевидные свойства: $\angle(k,l) \equiv 0 \Leftrightarrow k \parallel l$; $\angle(k,l)+\angle(l,m) \equiv \angle(k,m)$. Следствие: $\angle(k,l) \equiv -\angle(l,k)$. В рамках этого листика символ $\angle ABC$ всегда означает $\angle(AB,BC)$.

**Теорема** (Критерий коцикличности)**.** *Четыре различные точки плоскости $A$, $B$, $C$, $D$ лежат на одной окружности или прямой тогда и только тогда, когда $\angle ABC \equiv \angle ADC$.*

0. Докажите, что если точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на прямых $BC$, $CA$, $AB$ соответственно, то описанные окружности треугольников $A_1CB_1$, $B_1AC_1$, $C_1BA_1$ имеют общую точку.

1. Четыре окружности пересекают друг друга по циклу (т.е. первая вторую, вторая третью, третья четвёртую, четвёртая первую) в четырёх парах точек. Известно, из этих четырёх пар можно выбрать по одной точек, так чтобы они лежали на одной окружности или прямой. Докажите, что оставшиеся четыре точки тоже лежат на одной окружности или прямой.

2. (*Обобщённая теорема Симсона*) Из точки $P$ на описанной окружности треугольника $ABC$ провели прямые $l_a$, $l_b$, $l_c$, такие что $\angle(l_a,BC) \equiv \angle(l_b,CA) \equiv \angle(l_c,AB)$. Докажите, что точки пересечения $l_a$ и $BC$, $l_b$ и $CA$, $l_c$ и $AB$ лежат на одной прямой.

3. Дан треугольник $ABC$. На прямой $BC$ лежат точки $B_1$, $C_1$, причём $\angle BAB_1 + \angle CAC_1 \equiv 0$. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников $ABB_1$, $ABC_1$, $ACB_1$, $ACC_1$ лежат на одной окружности.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы пар углов $A$ и $B$, $B$ и $C$, $C$ и $D$, $D$ и $A$ пересекаются в различных точках $K$, $L$, $M$, $N$ соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

5. (*Точка Микеля*) Даны четыре прямые общего положения (т. е. никакие три не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны). Вокруг треугольников, образованных всевозможными тройками прямых, описаны окружности. Докажите, что они имеют общую точку.

6. Пусть $X$ — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с перпендикулярными диагоналями. На прямой $AD$ отметили точку $K$. Описанные окружности треугольников $AXK$, $DXK$ пересекают прямые $AB$, $CD$ в точках $M$, $N$ соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $MKN$ лежит на средней линии трапеции.

7. Треугольник $ABC$ вписан в окружность с центром $O$. Некоторая окружность проходит через точки $A$ и $O$ и вторично пересекает прямые $AB$, $AC$ в точках $C'$, $B'$ соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника $B'C'O$ лежит на прямой $BC$.

8. Стороны выпуклого пятиугольника продолжены до пересечения так, что образовалась пятиконечная звезда (пентаграмма). Вокруг каждого из лучей этой звезды, т.е. треугольника, примыкающего к одной из сторон пятиугольника, описана окружность. Докажите, что точки пересечения соседних окружностей, отличные от вершин пятиугольника, лежат на одной окружности.