

Прямые углы и вписанные четырёхугольники

9 класс

19.09.2015

1. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке H . Докажите, что H — точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.
2. Основание A_1 высоты AA_1 треугольника ABC отразили симметрично относительно прямой AC . Докажите, что отражённая точка лежит на прямой B_1C_1 , где B_1 и C_1 — основания двух других высот треугольника.
3. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка P . Пусть P_C и P_B — проекции точки P на прямые AB , AC соответственно. Докажите, что точки B , C , P_B , P_C лежат на одной окружности.
4. Прямая PA касается описанной окружности треугольника ABC . C_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые AB , AC . Докажите, что $BC \perp B_1C_1$.
5. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Обозначим X основание перпендикуляра, опущенного из B на AO . Далее: M — середина BC , AA_1 — высота треугольника ABC . Докажите, что треугольник XMA_1 — равнобедренный.
6. Из основания A_1 высоты AA_1 остроугольного треугольника ABC опустили перпендикуляры стороны AB , AC и на высоты BB_1 , CC_1 . Докажите, что четыре основания опущенных перпендикуляров лежат на одной прямой.
7. (*Теорема Симсона*) На описанной окружности треугольника ABC отметили точку P . Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника, лежат на одной прямой.
8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Прямая, перпендикулярная стороне AC и проходящая через точку A_1 , пересекает прямую B_1C_1 в точке D . Докажите, что угол ADC прямой.
9. В остроугольном треугольнике ABC на продолжениях высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 отметили точки B_2 и C_2 соответственно. Оказалось, что $\angle B_2AC_2 = 90^\circ$. Из точки A опустили перпендикуляр AH на B_2C_2 . Докажите, что $\angle BHC = 90^\circ$.
10. Докажите, что в остроугольном треугольнике середины двух высот, основание третьей и ортоцентр лежат на одной окружности.