Геометрия масс. Теоретическая часть.

9 класс

12.09.2015

Определение. *Материальная точка* $A(m)$ — точка A плоскости, которой сопоставлено вещественное число m. Точка Z — *центр масс* системы материальных точек $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_n(m_n)$, если выполнено равенство: $m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \overrightarrow{0}$.

Теорема. *У любой конечной системы материальных точек $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_n(m_n)$ с ненулевой суммарной массой центр масс Z существует, единственен и для любой точки O плоскости удовлетворяет соотношению:*

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Теорема. *Центр масс системы двух материальных точек $A_1(m_1)$ и $A_2(m_2)$ (где $m_1 + m_2 \neq 0$) находится по «правилу рычага»: это такая точка Z прямой A_1A_2, что $\overline{A_1Z}/\overline{ZA_2} = m_2/m_1$.*

Теорема (О перегруппировке масс)**.** *Пусть точка Z — центр масс системы материальных точек $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_n(m_n), A_{n+1}(m_{n+1}), \ldots, A_{n+k}(m_{n+k})$, а точка Y — центр масс подсистемы $A_{n+1}(m_{n+1}), \ldots, A_{n+k}(m_{n+k})$. Пусть также $m_1 + m_2 + \ldots + m_{n+k} \neq 0$ и $m_{n+1} + \ldots + m_{n+k} \neq 0$. Тогда центр масс системы $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_n(m_n), Y(m_{n+1} + \ldots + m_{n+k})$ совпадает с Z.*

Геометрия масс. Теоретическая часть.

9 класс

12.09.2015

Определение. *Материальная точка* $A(m)$ — точка A плоскости, которой сопоставлено вещественное число m. Точка Z — *центр масс* системы материальных точек $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_n(m_n)$, если выполнено равенство: $m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \overrightarrow{0}$.

Теорема. *У любой конечной системы материальных точек $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_n(m_n)$ с ненулевой суммарной массой центр масс Z существует, единственен и для любой точки O плоскости удовлетворяет соотношению:*

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Теорема. *Центр масс системы двух материальных точек $A_1(m_1)$ и $A_2(m_2)$ (где $m_1 + m_2 \neq 0$) находится по «правилу рычага»: это такая точка Z прямой A_1A_2, что $\overline{A_1Z}/\overline{ZA_2} = m_2/m_1$.*

Теорема (О перегруппировке масс)**.** *Пусть точка Z — центр масс системы материальных точек $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_n(m_n), A_{n+1}(m_{n+1}), \ldots, A_{n+k}(m_{n+k})$, а точка Y — центр масс подсистемы $A_{n+1}(m_{n+1}), \ldots, A_{n+k}(m_{n+k})$. Пусть также $m_1 + m_2 + \ldots + m_{n+k} \neq 0$ и $m_{n+1} + \ldots + m_{n+k} \neq 0$. Тогда центр масс системы $A_1(m_1), A_2(m_2), \ldots, A_n(m_n), Y(m_{n+1} + \ldots + m_{n+k})$ совпадает с Z.*

Геометрия масс. Задачи.

9 класс

12.09.2015

1. На сторонах AB, AC треугольника ABC отмечены точки C_1, B_1 соответственно таким образом, что $AC_1/C_1B = 1/3$ и $AB_1/B_1C = 1/6$. Пусть X — точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1 и пусть прямая AX пересекает отрезок BC в точке A_1. Вычислите а) AX/XA_1; б) BA_1/A_1C.

2. (*Теорема Ван-Обеля*) На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1, причём прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке X. Известно, что $\overline{AC_1}/\overline{C_1B} = p$ и $\overline{AB_1}/\overline{B_1C} = q$. Докажите, что $\overline{AX}/\overline{XA_1} = p + q$.

3. (*Теорема Чевы*) На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1, причём прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке X. Введём обозначения: $\alpha = \overline{AB_1}/\overline{B_1C}$, $\beta = \overline{CA_1}/\overline{A_1B}$, $\gamma = \overline{BC_1}/\overline{C_1A}$. Докажите, что $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$.

4. В треугольной пирамиде каждую вершину соединили отрезком с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что полученные четыре отрезка пересекаются в одной точке (обозначим её X). Докажите также, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер пирамиды тоже проходят через точку X. В каком отношении точкой X делится каждый из семи проведённых отрезков?

5. В вершинах треугольника ABC расставлены массы: $A(-1)$, $B(1)$, $C(1)$. Где находится центр масс этой системы?

6. Внутри треугольника ABC отмечена точка X. Её отразили относительно середин сторон BC, CA, AB, получили точки X_A, X_B, X_C соответственно. Докажите, что прямые AX_A, BX_B, CX_C пересекаются в одной точке.

7. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Некоторая плоскость пересекает рёбра SA, SB, SC, SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Известно, что $SA_1/A_1A = 1/3$, $SB_1/B_1B = 1/5$, $SC_1/C_1C = 1/4$. Вычислите SD_1/D_1D.

8. На сторонах AB, BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки P, Q соответственно, так что $AP = CQ$. Отрезки AQ и CP пересекаются в точке X. Докажите, что DX — биссектриса угла CDA.

9. а) В точках касания описанного четырёхугольника со своей вписанной окружностью расставлены массы, равные длине соответствующей стороны. Докажите, что центр масс рассматриваемой системы совпадает с центром вписанной окружности.

   б) (*Теорема Ньютона*) Докажите, что в описанном четырёхугольнике центр вписанной окружности лежит на отрезке, соединяющем середины его диагоналей.

10. а) Пусть ABC — правильный треугольник. Какие *комплексные* массы надо поместить в вершины A и B, так чтобы центр масс рассматриваемой системы оказался в вершине C?

    б) На сторонах треугольника ABC наружу построены равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1, ABC_1. Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника.