24.11.15

Простейшие геометрические неравенства

На этом (и на следующем) занятии мы займемся простейшими геометрическими неравенствами. Некоторые неравенства у вас уже встречались при решении задач на разные темы: неравенство треугольника и его простейшие следствия; напротив большей стороны треугольника лежит больший угол и обратное утверждение; зависимость вида угла, опирающегося на диаметр окружности, от положения его вершины относительно этой окружности, и т. п.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что: а) в любом четырехугольнике сумма длин диагоналей меньше, чем сумма длин всех сторон; б) в любой трапеции разность длин боковых сторон меньше разности длин оснований.

2. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике найдется вершина, расстояние от которой до противолежащей диагонали не превосходит половины этой диагонали.

3. Докажите, что сумма медиан треугольника меньше его периметра, но больше, чем три четверти периметра.

4. Известно, что для сторон треугольника выполняется неравенство $a > b > c$. Докажите, что для медиан, проведенных к этим сторонам, выполняется неравенство $m_a < m_b < m_c$.

5. Даны треугольник ABC и точки D и E такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90°$. Докажите, что длина отрезка DE не превосходит половины периметра треугольника ABC.

6. Докажите, что для любой точки K, лежащей внутри треугольника ABC, выполняется неравенства: а) $AB + AC > KB + KC$; б) $p < AK + BK + CK < 2p$, где p – полупериметр ABC.

7. Внутри отрезка AB взяты точки C и D так, что $AC = BD$. Докажите, что для любой точки O, не лежащей на прямой AB, выполняется неравенство $OA + OB > OC + OD$.

8. а) На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC выбрана произвольная точка N. Докажите, что $AN + BN > AC + BC$.

б) Точка M – середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$, $\angle AMD = 120°$. Докажите, что $AB + \frac{1}{2}BC + CD \geq AD$.

9. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и BC выбраны точки K и L так, что $AK = BL$. Докажите, что $KL \geq \frac{1}{2}AC$. Когда достигается равенство?

10. В треугольнике ABC на стороне AB отмечены точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне BC – точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $KN + LM \geq AC$. Когда достигается равенство?

Подсказки

(*для тех, кто затрудняется при решении задач 1 – 3*)

1) Не забудьте, что неравенство треугольника – двойное: $|a-b| < c < a+b$.

2) В тупоугольном треугольнике медиана, проведенная к большей стороне, меньше, чем половина этой стороны.

3) Попробуйте сначала доказать неравенство для медианы треугольника: $\frac{|a-b|}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$.