Биномиальные коэффициенты

9 класс

07.04.2016

0. Вспомните или спросите у соседа, что такое биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля.

В задачах 1-5 надо придумать два доказательства.

1. (Бином Ньютона) $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$.
2. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.
3. $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.
4. $C_n^0 2^0 + C_n^1 2^1 + \ldots + C_n^n 2^n = 3^n$.
5. $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$.
6. $C_p^0 C_q^m + C_p^1 C_q^{m-1} + \ldots + C_p^{m-1} C_q^1 + C_p^m C_q^0 = C_{p+q}^m$.
7. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.
8. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.
9. $C_{n-1}^{k-1} C_n^{k+1} C_{n+1}^k = C_{n-1}^k C_{n+1}^{k+1} C_n^{k-1}$.
10. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть стоящего справа над данным числом.
11. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит данное число (сами эти диагонали в данный параллелограмм не включаются).
12. Найдите сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1)$.
13. Используя задачи 11 и 12, найдите сумму $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.
14. Используя задачи 11, 12 и 13, найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.
15. Расскажите и покажите, каким образом можно получить формулу для нахождения суммы $1^k + 2^k + ... + n^k$.