Вспоминаем показатели

31.03.2016

Теоретические задачи

1. Пусть a, n – взаимно простые числа. Рассмотрим последовательность остатков по модулю n следующих чисел $1, a, a^2, a^3 \ldots$. Докажите, что эта последовательность периодическая и не содержит предпериода.

   Определение. Минимальный период последовательности остатков из предыдущей задачи называется *показателем* a *по модулю* n. Далее будем обозначать его буквой d.

2. Зафиксируем взаимно простые числа a и n.
   а) Докажите, что d – показатель a по модулю n тогда и только тогда, когда d – наименьшее такое натуральное число, что $(a^d - 1)$ делится на n.
   б) Пусть d – показатель a по модулю n. Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $d \mid l$.
   в) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.
   г) Докажите, что показатель любого числа по модулю n (взаимно простого с n, конечно) делит $\varphi(n)$ (функция Эйлера).

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть p – простое число, d – один из делителей числа $p-1$. Выберем из остатков $1, 2, \ldots, p-1$ те, чей показатель по модулю p равен d. Чему равен остаток произведения выбранных чисел по модулю p?

2. Пусть p – простое число. Докажите, что все простые делители числа $p^p - 1$ и большие p дают остаток 1 при делении на p.

3. Пусть n – чётное число. Докажите, что любой делитель $n^4 + 1$ дает остаток 1 при деление на 8.

4. Пусть $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, где p — простое число. Натуральное число m таково, что $p|m$. Докажите, что любой простой делитель $f(m)$ взаимно прост с $m(m-1)$.

5. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) таких, что $p|q^r + 1, q|r^p + 1, r|p^q + 1$.

6. Найдите все простые p и q для которых $5^p + 5^q$ делится на pq.

Вспоминаем показатели

31.03.2016

Теоретические задачи

1. Пусть a, n – взаимно простые числа. Рассмотрим последовательность остатков по модулю n следующих чисел $1, a, a^2, a^3 \ldots$. Докажите, что эта последовательность периодическая и не содержит предпериода.

   Определение. Минимальный период последовательности остатков из предыдущей задачи называется *показателем* a *по модулю* n. Далее будем обозначать его буквой d.

2. Зафиксируем взаимно простые числа a и n.
   а) Докажите, что d – показатель a по модулю n тогда и только тогда, когда d – наименьшее такое натуральное число, что $(a^d - 1)$ делится на n.
   б) Пусть d – показатель a по модулю n. Пусть $a^l \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что $d \mid l$.
   в) Докажите, что $a^s \equiv a^r \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $s \equiv r \pmod{d}$.
   г) Докажите, что показатель любого числа по модулю n (взаимно простого с n, конечно) делит $\varphi(n)$ (функция Эйлера).

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть p – простое число, d – один из делителей числа $p-1$. Выберем из остатков $1, 2, \ldots, p-1$ те, чей показатель по модулю p равен d. Чему равен остаток произведения выбранных чисел по модулю p?

2. Пусть p – простое число. Докажите, что все простые делители числа $p^p - 1$ и большие p дают остаток 1 при делении на p.

3. Пусть n – чётное число. Докажите, что любой делитель $n^4 + 1$ дает остаток 1 при деление на 8.

4. Пусть $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, где p — простое число. Натуральное число m таково, что $p|m$. Докажите, что любой простой делитель $f(m)$ взаимно прост с $m(m-1)$.

5. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) таких, что $p|q^r + 1, q|r^p + 1, r|p^q + 1$.

6. Найдите все простые p и q для которых $5^p + 5^q$ делится на pq.