Лемма Холла

9 класс

21.03.16

Лемма Холла. Есть n юношей и несколько девушек. Известно, что каких бы k юношей ни выбрать, число знакомых им совокупности девушек не меньше k. Тогда все юноши могут выбрать по весте из числа своих знакомых.

Докажем лемму Холла двумя способами.

1. (Метод чередующихся цепей). Докажите лемму Холла по индукции, используя следующую конструкцию:

   Предположим, некоторые пары заключили брак, но при этом один из юношей стался неженатым. Этот юноша с горя вступает в тайное общество. Далее каждый молодой человек приводил в тайное общество всех знакомых девушек, а каждая молодая жена - своего мужа...

2. (Индукция). Назовем множество из k юношей критическим, если совокупное количество знакомых им девушек в точности ровно k.

   а) Предположим, что критическое множество юношей не содержит меньших критических подмножеств. Докажите, что никакая свадьба юноши из этого множества не испортит для остальных условие леммы Холла.

   б) Докажите, что если удалить критическое множество юношей, вместе с их знакомыми девушками, то для оставшихся будет выполнено условие леммы Холла.

   в) Докажите лемму Холла индукцией по числу вершин графа.

3. В каждой строке и каждом столбце шахматной доски стоит по три ладьи. Докажите, что можно выбрать 8 не бьющих друг друга ладей.

4. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

5. Все вершины двудольного графа имеют степень k.

   а) Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

   б) Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в k цветов правим образом (то есть так, чтобы никакие два одноцветных ребра не имели общей вершины).

6. Табло состоит из 2016 лампочек. Двое играют в игру. Ход игрока состоит в том, что он изменяет состояние одной лампочки (т.е. включает и выключает ее). При этом нельзя повторять позицию, которая уже встречалась на табло. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. *Лемма Холла для арабских стран.* Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это делать тогда только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

Лемма Холла

9 класс

21.03.16

Лемма Холла. Есть n юношей и несколько девушек. Известно, что каких бы k юношей ни выбрать, число знакомых им совокупности девушек не меньше k. Тогда все юноши могут выбрать по весте из числа своих знакомых.

Докажем лемму Холла двумя способами.

1. (Метод чередующихся цепей). Докажите лемму Холла по индукции, используя следующую конструкцию:

   Предположим, некоторые пары заключили брак, но при этом один из юношей стался неженатым. Этот юноша с горя вступает в тайное общество. Далее каждый молодой человек приводил в тайное общество всех знакомых девушек, а каждая молодая жена - своего мужа...

2. (Индукция). Назовем множество из k юношей критическим, если совокупное количество знакомых им девушек в точности ровно k.

   а) Предположим, что критическое множество юношей не содержит меньших критических подмножеств. Докажите, что никакая свадьба юноши из этого множества не испортит для остальных условие леммы Холла.

   б) Докажите, что если удалить критическое множество юношей, вместе с их знакомыми девушками, то для оставшихся будет выполнено условие леммы Холла.

   в) Докажите лемму Холла индукцией по числу вершин графа.

3. В каждой строке и каждом столбце шахматной доски стоит по три ладьи. Докажите, что можно выбрать 8 не бьющих друг друга ладей.

4. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

5. Все вершины двудольного графа имеют степень k.

   а) Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

   б) Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в k цветов правим образом (то есть так, чтобы никакие два одноцветных ребра не имели общей вершины).

6. Табло состоит из 2016 лампочек. Двое играют в игру. Ход игрока состоит в том, что он изменяет состояние одной лампочки (т.е. включает и выключает ее). При этом нельзя повторять позицию, которая уже встречалась на табло. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7. *Лемма Холла для арабских стран.* Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это делать тогда только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.