

Теорема Шаля

9 класс
17.03.16

Движением называется произвольное преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между парами точек, т.е. $|f(A)f(B)| = |AB|$.

Параллельным переносом на вектор \vec{AB} называют преобразование, переводящее точку X в такую точку X' , что $\vec{XX'} = \vec{AB}$.

Симметрией относительно точки A называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X' , что A — середина отрезка XX' .

Осевой симметрией относительно прямой l называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X' , что l — серединный перпендикуляр к отрезку XX' .

Скользящей симметрией называют композицию симметрии относительно некоторой прямой l и переноса на вектор, параллельный l (этот вектор может быть нулевым).

1. Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Докажите, что существует единственное движение, которое переводит один треугольник в другой.
2. Докажите, что любое движение плоскости представимо в виде композиции параллельного переноса, поворота и, быть может, симметрии.
3. Проверьте, что:
 - а) композиция двух осевых симметрий относительно двух параллельных осей l_1 и l_2 является параллельным переносом на вектор, перпендикулярный этим осям, направленный от l_1 к l_2 , длина которого равна удвоенному расстоянию между осями;
 - б) композиция двух осевых симметрий относительно двух пересекающихся осей l_1 и l_2 является поворотом относительно точки их пересечения на удвоенный угол между осями;
 - в) композиция двух поворотов на углы α и β с различными центрами является поворотом на угол $\alpha + \beta$, если $\alpha + \beta \neq 2\pi k$, и параллельным переносом в противном случае;
 - г) композиция параллельного переноса на вектор \vec{a} и поворота с центром в точке O на ненулевой угол α является поворотом на угол α .
4. Докажите, что любое движение плоскости является композицией
 - а) нескольких осевых симметрий;
 - б) не более чем трёх осевых симметрий.

Теорема Шаля. Всякое сохраняющее ориентацию движение плоскости представляет собой либо поворот (в частности, центральную симметрию), либо параллельный перенос. Всякое меняющее ориентацию движение плоскости является осевой или скользящей симметрией.

5. Через данную точку A провести прямую, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения ее с данной прямой и данной окружностью, делился точкой A пополам.
6. На прямоугольном бильярдном столе лежит шар. Постройте траекторию, при движении по которой шар, отразившись от каждой стенки по одному разу, вернется на исходное место.
7. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. На его сторонах AB , BC , CD , DE и EA построили во внешнюю сторону равносторонние треугольники ABP , BCQ , CDR , DES и EAT , а затем стерли все точки, кроме P , Q , R , S и T . Как, спомощью циркуля и линейки, восстановить исходный пятиугольник.
8. Для каждого нечетного n впишите в данную окружность n -угольник, стороны которого параллельны заданным n прямым.