03.03.2016

Метрические соотношения в треугольнике

Обозначения на сегодня:

A, B, C — вершины треугольника; a, b, c — длины сторон треугольника; p — полупериметр треугольника; S — площадь треугольника; α, β, γ — углы треугольника; m_a, m_b, m_c — длины медиан треугольника; l_a, l_b, l_c — длины биссектрис треугольника; h_a, h_b, h_c — длины высот треугольника; r, R — радиусы вписанной и описанной окружности; r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей.

1. а) **(Теорема косинусов)** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

   б) **(Теорема синусов)** $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

2. **Площадь**

   а) $S = \frac{ah_a}{2}$.

   б) $S = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

   в) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

   г) $S = pr$.

   д) $S = (p-a)r_a$.

   ж) $S = \frac{abc}{4R}$.

   з) $S = \frac{cr_ar_b}{r_a+r_b}$

3. а) $l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$.

   б) $l_a = \sqrt{\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}}$.

4. $m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.

5. Докажите, что медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = 5c^2$.

6. $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$.

7. $ab + bc + ca = r^2 + p^2 + 4rR$.

8. Пусть $l_a \geqslant l_b \geqslant l_c$, тогда $l_a^2 \geqslant \sqrt{3}S \geqslant l_c^2$.

9. $\frac{a^2+b^2}{m_c} + \frac{a^2+c^2}{m_b} + \frac{b^2+c^2}{m_a} \leqslant 12R$