Комплексные числа

9 класс

29.02.16

Определение. *Комплексным* числом называется формальная запись вида $a + bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числом 0 назовем выражение $0 + 0i$.

1. Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Докажите, что
   а) $x + y, x - y, xy \in \mathbb{C}$;
   б) если $y \neq 0$, то $\frac{x}{y} \in \mathbb{C}$.

2. Упростите выражение: $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.

Определение. Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряженными*. Сопряженное к числу z обозначается $\overline{z}$.

3. а) Докажите, что если z и $\overline{z}$ являются корнями квадратного уравнения, то коэффициенты этого уравнения – вещественные числа.
   б) Докажите, что $z + \overline{z}, z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

4. Докажите свойства сопряжения: $\overline{z} + \overline{t} = \overline{z + t}, \overline{zt} = \overline{z}\overline{t}, \overline{\overline{z}} = z$.

5. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что $f(x) = 0$, то $f(\overline{x}) = 0$.

6. а) Докажите, что для любого комплексного числа z найдется такое комплексное t, что $t^2 = z$. Сколько существует таких t?
   б) Решите уравнение $x^2 - (2i + 2)x + (2i - 1) = 0$ в комплексных числах.

7. Докажите, что каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $r(\cos\phi + i\sin\phi)$, причем r определяется единственным образом, а ϕ – с точностью до кратного 2π (если число не равно нулю). Число r называется *модулем* (и обозначается $|z|$), ϕ – *аргументом* комплексного числа, а сама форма называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

8. Представьте в тригонометрической форме числа $2, 1 + i, 1 - \sqrt{3}i$.

9. а) Докажите, что $|zt| = |z| \cdot |t|$ для любых $z, t \in \mathbb{C}$.
   б) Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

10. а) Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).
    б) Докажите формулу Муавра: $(r(\cos\phi + i\sin\phi))^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$.

Комплексные числа

9 класс

29.02.16

Определение. *Комплексным* числом называется формальная запись вида $a + bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числом 0 назовем выражение $0 + 0i$.

1. Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Докажите, что
   а) $x + y, x - y, xy \in \mathbb{C}$;
   б) если $y \neq 0$, то $\frac{x}{y} \in \mathbb{C}$.

2. Упростите выражение: $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.

Определение. Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряженными*. Сопряженное к числу z обозначается $\overline{z}$.

3. а) Докажите, что если z и $\overline{z}$ являются корнями квадратного уравнения, то коэффициенты этого уравнения – вещественные числа.
   б) Докажите, что $z + \overline{z}, z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

4. Докажите свойства сопряжения: $\overline{z} + \overline{t} = \overline{z + t}, \overline{zt} = \overline{z}\overline{t}, \overline{\overline{z}} = z$.

5. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что $f(x) = 0$, то $f(\overline{x}) = 0$.

6. а) Докажите, что для любого комплексного числа z найдется такое комплексное t, что $t^2 = z$. Сколько существует таких t?
   б) Решите уравнение $x^2 - (2i + 2)x + (2i - 1) = 0$ в комплексных числах.

7. Докажите, что каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $r(\cos\phi + i\sin\phi)$, причем r определяется единственным образом, а ϕ – с точностью до кратного 2π (если число не равно нулю). Число r называется *модулем* (и обозначается $|z|$), ϕ – *аргументом* комплексного числа, а сама форма называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

8. Представьте в тригонометрической форме числа $2, 1 + i, 1 - \sqrt{3}i$.

9. а) Докажите, что $|zt| = |z| \cdot |t|$ для любых $z, t \in \mathbb{C}$.
   б) Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

10. а) Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).
    б) Докажите формулу Муавра: $(r(\cos\phi + i\sin\phi))^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$.