Скалярное произведение векторов

9 класс

18.02.16

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов u и v называется число $|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|\cdot\cos(\overline{u},\overline{v})$. В случае, если хотя бы один из векторов $\overline{u}$ или $\overline{v}$ равен 0, их скалярное произведение также считается равным 0. Скалярное произведение векторов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ обозначается $(\overline{u},\overline{v})$ или $\overline{u}\cdot\overline{v}$.

1. Докажите, что вектор $\overline{a}+\overline{b}$ перпендикулярен вектору $\overline{a}-\overline{b}$ тогда и только тогда, когда вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны по длине.

2. Докажите, что если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то в любом четырехугольнике с теми же длинами сторон диагонали перпендикулярны.

3. Для произвольных точек пространства A, B, C и D доказать формулу $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BD}=0$.

4. Докажите, что
а) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон;
б) сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника не меньше, чем сумма квадратов его диагоналей, причем равенство достигается только в случае параллелограмма.

5. а) Даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Докажите, что $\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2$.
б) Вещественные числа a, b, c и d таковы, что $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$. Найдите $ab+cd$.

6. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

7. Пусть O – центр описанной окружности, H – ортоцентр и M – точка пересечения медиан треугольника ABC.
а)Докажите, что $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.
б) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $MH=2\cdot OM$.
в) Докажите, что $OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

8. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Докажите неравенство

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}.$$

Скалярное произведение векторов

9 класс

18.02.16

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов u и v называется число $|\overline{u}|\cdot|\overline{v}|\cdot\cos(\overline{u},\overline{v})$. В случае, если хотя бы один из векторов $\overline{u}$ или $\overline{v}$ равен 0, их скалярное произведение также считается равным 0. Скалярное произведение векторов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ обозначается $(\overline{u},\overline{v})$ или $\overline{u}\cdot\overline{v}$.

1. Докажите, что вектор $\overline{a}+\overline{b}$ перпендикулярен вектору $\overline{a}-\overline{b}$ тогда и только тогда, когда вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны по длине.

2. Докажите, что если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то в любом четырехугольнике с теми же длинами сторон диагонали перпендикулярны.

3. Для произвольных точек пространства A, B, C и D доказать формулу $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}+\overline{CA}\cdot\overline{BD}=0$.

4. Докажите, что
а) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон;
б) сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника не меньше, чем сумма квадратов его диагоналей, причем равенство достигается только в случае параллелограмма.

5. а) Даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Докажите, что $\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2$.
б) Вещественные числа a, b, c и d таковы, что $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$. Найдите $ab+cd$.

6. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

7. Пусть O – центр описанной окружности, H – ортоцентр и M – точка пересечения медиан треугольника ABC.
а)Докажите, что $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$.
б) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $MH=2\cdot OM$.
в) Докажите, что $OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

8. Пусть α, β, γ – углы треугольника. Докажите неравенство

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}.$$