21.01.2016

Разнобой по геометрии

1. Пусть точки A, B, C лежат на окружности, а прямая b касается этой окружности в точке B. Из точки P, лежащей на прямой b, опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1 на прямые AB и BCсоответственно (точки A_1 и C_1 лежат на отрезках AB и BC). Докажите, что $A_1C_1 \perp AC$.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD, BE и CF, пересекающиеся в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BE и CF в точках M и N соответственно. Докажите, что точки A, I, M и N лежат на одной окружности.

3. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть B_1H – высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK – биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках D и P. Точки A и B лежат на окружностях ω_1 и ω_2 соответственно, причем AB – общая касательная к этим окружностям, а D лежит внутри треугольника ABP. AD вторично пересекает окружность ω_2 в точке C, M – середина BC. Докажите, что $\angle DPM = \angle BDC$.

6. На стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки E и F (точка E ближе к точке B , чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$.

7. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.