

## Про графы и раскраски

9 класс

18.01.16

Граф называется *плоским*, если он изображен на плоскости так, что вершинам соответствуют различные точки плоскости, а ребрам – непересекающиеся ломаные между этими вершинами.

Для плоского графа можно определить *грань* как одну из областей, на которые ребра графа делят плоскость (в том числе, «внешнюю» область).

- а) **Формула Эйлера.** Пусть  $V$  – число вершин,  $E$  – ребер,  $F$  – граней,  $k$  – компонент связности плоского графа. Тогда  $V - E + F = 1 + k$ .  
б) Докажите, что для любого плоского графа ( $V > 2$ ) справедливо неравенство  $2E \geq 3F$ .  
в) Докажите, что для любого плоского графа ( $V > 2$ ) справедливо неравенство  $E \leq 3V - 6$ .  
г) Докажите, что в двудольном плоском графе  $E \geq 2F$ , если  $E \geq 2$ .  
д) Докажите, что в двудольном плоском графе  $E \leq 2V - 4$ , если  $E \geq 2$ .
- Вася нарисовал на плоскости политическую карту мира не отрывая руки от бумаги, при этом закончил там же, где и начал. Докажите, что получившуюся карту можно раскрасить в два цвета правильным образом.
- Докажите, что карту мира можно покрасить правильным образом
  - в 6 цветов;
  - в 5 цветов.
- Докажите, что любой граф можно покрасить в два цвета так, чтобы разноцветных ребер было не меньше, чем одноцветных.
- В графе из 25 вершин у любых двух вершин имеется вершина, соединенная с обеими. Докажите, что в этом графе не меньше 36 ребер.

## Про графы и раскраски

9 класс

18.01.16

Граф называется *плоским*, если он изображен на плоскости так, что вершинам соответствуют различные точки плоскости, а ребрам – непересекающиеся ломаные между этими вершинами.

Для плоского графа можно определить *грань* как одну из областей, на которые ребра графа делят плоскость (в том числе, «внешнюю» область).

- а) **Формула Эйлера.** Пусть  $V$  – число вершин,  $E$  – ребер,  $F$  – граней,  $k$  – компонент связности плоского графа. Тогда  $V - E + F = 1 + k$ .  
б) Докажите, что для любого плоского графа ( $V > 2$ ) справедливо неравенство  $2E \geq 3F$ .  
в) Докажите, что для любого плоского графа ( $V > 2$ ) справедливо неравенство  $E \leq 3V - 6$ .  
г) Докажите, что в двудольном плоском графе  $E \geq 2F$ , если  $E \geq 2$ .  
д) Докажите, что в двудольном плоском графе  $E \leq 2V - 4$ , если  $E \geq 2$ .
- Вася нарисовал на плоскости политическую карту мира не отрывая руки от бумаги, при этом закончил там же, где и начал. Докажите, что получившуюся карту можно раскрасить в два цвета правильным образом.
- Докажите, что карту мира можно покрасить правильным образом
  - в 6 цветов;
  - в 5 цветов.
- Докажите, что любой граф можно покрасить в два цвета так, чтобы разноцветных ребер было не меньше, чем одноцветных.
- В графе из 25 вершин у любых двух вершин имеется вершина, соединенная с обеими. Докажите, что в этом графе не меньше 36 ребер.