Радикальные оси

9 класс

10.12.15

Напоминание: *радикальной осью* пары неконцентрических окружностей называется прямая, на которой лежат все точки, степени которых относительно этих двух окружностей равны.

1. Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что радикальные оси всех трёх пар этих окружностей пересекаются в одной точке. Эта точка называется радикальным центром трёх окружностей.

2. На стороне AB прямогульного треугольника $ABC(\angle B = 90)$ выбрана точка C'. Точка B' – проекция C' на AC. BB' и CC' пересекаются в точке O. Докажите, что описанные окружности треугольников $BC'O$ и $OB'C$ вторично пересекаются на прямой AO.

3. Дана неравнобедренная трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

4. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекаются в точках C_0, A_0 и B_0. Докажите, что точки A_0, B_0, C_0 лежат на радикальной оси описанной окружности и окружности девяти точек.

5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AP и BQ пересекаются в точке H. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке T. CT вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямые HK и CT перпендикулярны.

6. Дан такой выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L и M — середины отрезков AB, CD и AC соответственно. Перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой BC, пересекается с перпендикуляром, проведенным из точки C к прямой AD, в точке H. Докажите, что прямые KL и HM перпендикулярны.

7. На сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC выбраны произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC.

8. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а K – точка пересечения перпендикуляра к BI, восстановленного в точке I, и прямой AC. Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из I на BK лежит на описанной окружности треугольника ABC.