

Египетские дроби

03.12.15

1. При каких k число 1 можно представить в виде суммы k различных дробей вида $\frac{1}{n}$?
2. а) Докажите, что дробь $\frac{1}{p}$, где p – простое число, представима в виде суммы дробей $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ ровно двумя способами.
б) Докажите, что дробь $\frac{2}{p}$, где $p > 2$ – простое, представима в виде суммы дробей $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ ровно двумя способами.
в) Докажите, что дробь $\frac{3}{91}$ не представима в виде суммы дробей $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$.
3. а) Докажите, что любое рациональное число из интервала $(0, 1)$ можно представить в виде $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$, где $a_i \in \mathbb{N}$, $a_{i+1} > a_i^2 - a_i$, $a_i \geq 2$.
б) Однозначно ли такое представление?
4. а) Докажите, что $\frac{1}{2}$ равно сумме всех дробей вида $\frac{1}{pq}$, где $0 < p < q \leq n$, $p + q > n$, $(p, q) = 1$.
б) Докажите, что любое положительное рациональное число можно представить в виде суммы различных дробей вида $\frac{1}{n}$.
5. а) Докажите, что любое рациональное число из интервала $(0, 1)$ можно представить в виде $\frac{a_1}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \dots + \frac{a_{n-1}}{n!}$, где для каждого i выполняется неравенство $0 \leq a_i \leq i$.
б) Однозначно ли такое представление?