

Степень точки

9 класс

30.11.15

1. На плоскости даны окружность и точка P . Прямая, проведенная через точку P , пересекает окружность в точках A и B . Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой.

Это произведение называется **степенью точки** P относительно окружности.

2. На сторонах угла с вершиной P выбраны точки A, B, C и D (A и B на одной стороне угла, C и D на другой) так, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

3. Если точка P лежит вне окружности, то квадрат длины касательной из точки P к окружности равен степени точки P .

4. Найдите степень точки P относительно окружности с центром O и радиусом R , если длина отрезка OP равна d .

5. Даны две точки A и B и постоянная C . Найдите ГМТ таких точек X , что $AX^2 - BX^2 = C$. Для каких постоянных C существует такое ГМТ?

6. Даны две окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что ГМТ точек P , таких что степени точки P относительно ω_1 и ω_2 одинаковые является прямой, перпендикулярной линии центров ω_1 и ω_2 . Докажите также, что если окружности пересекаются, то эта прямая проходит через их точки пересечения.

Эта прямая называется **радикальной осью** окружностей ω_1 и ω_2 .

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM . На луче CA отложен отрезок CN , равный BM . Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.
8. Доказать, что, если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M , то $BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM$.
9. Через вершины B и C треугольника ABC провели перпендикулярно прямой BC прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB пересекают прямые b и c в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC .
10. Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.
11. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC .