Такая разная комбинаторика

9 класс

26.11.15

1. Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?

2. Тридцать девочек – 13 в красных платьях и 17 в синих – водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

3. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх клеток так, что каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекало одно и то же количество уголков?

4. Все клетки квадратной таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Петя закрашивает клетки по следующим правилам. Вначале он закрашивает k клеток по своему усмотрению. Далее каждым ходом Петя может закрасить одну еще не закрашенную клетку с номером a, если для неё выполнено хотя бы одно из двух условий: либо в одной строке с ней есть уже закрашенная клетка с номером меньшим, чем a; либо в одном столбце с ней есть уже закрашенная клетка с номером большим, чем a. При каком наименьшем k независимо от исходной нумерации Петя за несколько ходов сможет закрасить все клетки таблицы?

5. В полдень на каждую из трёх стрелок часов село по одной мухе. В течение дня при встрече двух стрелок мухи на них менялись местами. Сколько оборотов к полуночи совершила каждая из мух? Стрелки часов перемещаются непрерывно.

6. Иван и Абрам играют в игру. Абрам загадал число от 1 до k (k известно обоим игрокам), а Иван пытается его отгадать. Иван может задать любой вопрос с форматом ответа да/нет, а Абрам должен честно ответить на него. Причём если Абрам отвечает «да», то Иван платит ему одну монету; если Абрам отвечает «нет», Иван платит две монеты. Изначально у Ивана n монет. При каком максимальном k он сможет отгадать загаданное число?

7. Барон Мюнхгаузен вернулся из отпуска. «Удивительная страна. Стоимости перелётов между всеми парами городов разные, но у всех циклических маршрутов, проходящим по всем городам, суммарная стоимость перелётов одинаковая». Известно, что городов не менее 2015 и что любые два из них соединены двусторонней авиалинией. Могли ли слова барона оказаться правдой?

8. Докажите, что число состояний кубика Рубика не кратно 13 (положения центральных квадратов граней остаются постоянными при операциях).

9. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате $2{\times}2$ одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?